التصحيح النموذجي

التّمرين الأوّل:

1) أ) لدينا (E) تكافئ $11x = 7y + 5$ ومنه $11x \equiv 5[7]$ ومنه $4x \equiv 5[7]$ ومنه $4x \equiv 12[7]$ ومنه $x \equiv 3[7]$ (لأنّ $\text{pgcd}(4,12)$ أوّلي مع 7) ومنه $x = \quad k + 3$ حيث k عدد صحيح نسبي، وبالتّعويض عن قيمة x في المعادلة (E) نجد أنّ $y = 11k + 4$، ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيّات $(7k + 3, 11k + 4)$.

ب) لدينا $0 \le x \le 50$ ومنه $0 \le 7k + 3 \le 50$ ومنه $-0,43 \le k \le 6,71$ إذن $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$، كذلك $0 \le y \le 70$ ومنه $0 \le 11k + 4 \le 70$ ومنه $-0,36 \le k \le 6$ إذن $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$، ومنه عدد نقاط المستقيم (D) التي تنتمي إلى (Δ) هو 7 نقاط.

2) أ) إذا كانت الثنائيّة (x,y) حلاً للمعادلة (F) فإنّ $11x - 7y^2 = 5$ ومنه $11x = 7y^2 + 5$ ومنه $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

ب) لدينا الجدولان:

y	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$

x	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
x^2	0	1	4	4	1	$\equiv [5]$

ج) لدينا $x^2 \equiv 2y^2[5]$ تكافئ $x^2 - 2y^2 \equiv 0[5]$، وعليه يكون لدينا الجدول الآتي

			بواقي قسمة $2y^2$ على 5						
			y	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
			$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$
	x	x^2							
بواقي قسمة x^2 على 5	0	0		$\boxed{0}$	3	2	2	3	$\equiv [5]$
	1	1		1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	2	4		4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	3	4		4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	4	1		1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	$\equiv [5]$	$\equiv [5]$							

من خلال الجدول نجد أنّ $x \equiv 0[5]$ و $y \equiv 0[5]$، وعليه يكون كل من x و y مضاعف للعدد 5.

3) نفرض أنّ كل من x و y مضاعف للعدد 5، أي أنّه يوجد عددان صحيحان α و β حيث $x = 5\alpha$ و $y = 5\beta$، ومنه بالتعويض في المعادلة (F) نجد أنّ $5(11\alpha^2 - 7\beta^2) = 1$ وهي معادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$، إذن الثنائيّة (x,y) ليست حلاً للمعادلة (F) عندما يكون كل من x و y مضاعف للعدد 5.

التّمرين الثاني:

I. 1) لدينا $h(1,84)=0$.

2) إشارة $h(x)$ موضّحة في الجدول

x	$-\infty$ $1,84$ $+\infty$
$h(x)$	$-$ 0 $+$

II. 1) نهاية الدّالّة g بجوار $-\infty$ هي $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)=+\infty$.

نهاية الدّالّة g بجوار $+\infty$ هي $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)=+\infty$.

نهاية الدّالّة g بجوار -1 هي $\lim_{x\xrightarrow{<}-1} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{2x+(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}=-\infty$.

نهاية الدّالّة g بجوار 1 هي $\lim_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{2x+(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}=+\infty$.

2) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1;+\infty[$ ودالّتها المشتقّة $g'(x)=\frac{2(x^2-1)-2x(2x)}{(x^2-1)^2}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2(x^3-x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2}{(x^2-1)^2}h(x)$، وبما أنّ $\frac{2}{(x^2-1)}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 و -1 فإنّ إشارة $g'(x)$ من إشارة $h(x)$، ومنه الدّالّة g متزايدة تماماً على $]1,82;+\infty[$ وتناقصة تماماً على $]-\infty,-1[\cup]1;1,82[$، وجدول تغيّراتها هو

x	$-\infty$	-1	1	$1,82$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	//////	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	//////	$+\infty \searrow$	$2,41$	$\nearrow +\infty$

3) الدّالّة g مستمرّة ورتيبة تماماً على $[-2,11;-2,10]$ و $g(-2,10)\times g(-2,11)<0$، إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسّطة، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2,11\le\alpha\le-2,10$.

4) إشارة $g(x)$ موضّحة في الجدول

x	$-\infty$	α	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	//////	$+$

III. 1) نهاية الدّالّة f بجوار $-\infty$ هي 0 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\ln(x^2-1)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x\times\frac{\ln(x^2-1)}{x^2-1}=0$.

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$.

نهاية الدالّة f بجوار $+\infty$ هي $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{\to+\infty} e^x \ln(x^2-1) = +\infty$.

نهاية الدالّة f بجوار -1 هي $-\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = \lim\limits_{\xrightarrow{<} -} e^x \ln(x^2-1) = -\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى $\left(C_f\right)$.

نهاية الدالّة f بجوار 1 هي $-\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = \lim\limits_{\xrightarrow{>}} e^x \ln(x^2-1) = -\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى $\left(C_f\right)$.

2) الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ ودالّتها المشتقة هي $f'(x)=g(x)\times e^x$. بما أنّ $e^x>0$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 و -1 فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$، أي أنّ الدّالّة f متزايدة تماماً على $]-\infty,\alpha[\cup]1,+\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]\alpha,-\ [$،

3) جدول تغيّرات الدّالّة f هو

x	-2		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$		$-\infty$	↗	$+\infty$

4) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\ln(x^2-1)=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ ومنه $f(\alpha)=e^\alpha\ln(\alpha^2-1)=\dfrac{2\alpha e^\alpha}{1-\alpha^2}$.

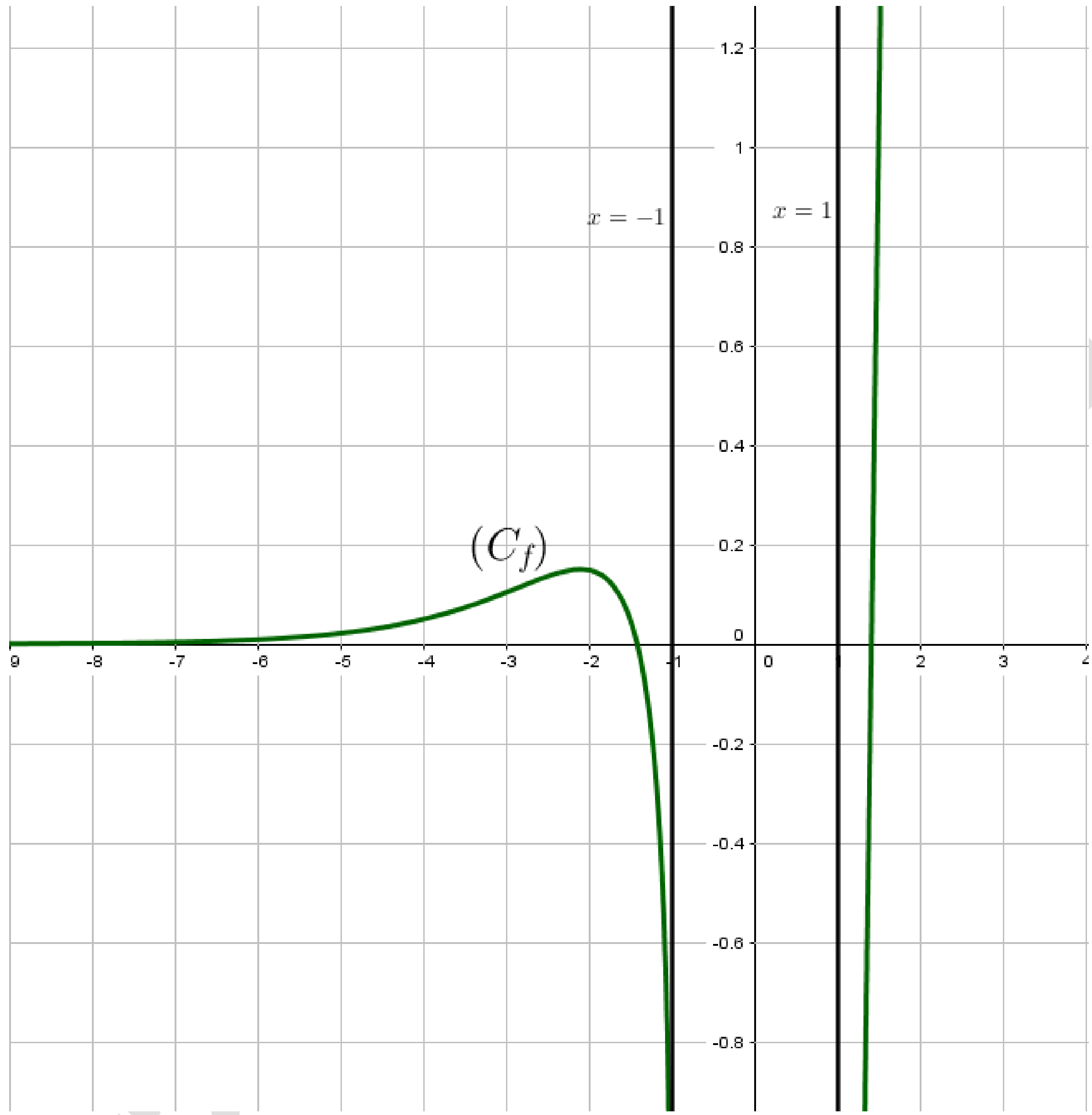
لدينا، من جهة $-2,11\le\alpha\le-2,10$ ومنه $-4,22\le2\alpha\le-4,20$ وكذلك $0,121\le e^\alpha\le0,122$ $-0,508\le2\alpha e^\alpha\le-0,514$ ومن جهة أخرى لدينا $-2,11\le\alpha\le-2,10$ ومنه $4,41\le\alpha^2\le4,45$ ومنه $-3,45\le1-\alpha^2\le-3,41$ ومنه $-0,293\le\dfrac{1}{1-\alpha^2}\le-0,289$، وعليه نجد أنّ $0,146\le\dfrac{2\alpha e^\alpha}{1-\alpha^2}\le0,151$

ومنه $0,146\le f(\alpha)\le0,151$.

5) الدّالّة f مستمرّة ورتيبة تماماً على المجال $]-1,42;-1,41[$ و $f(-1,42)\times f(-1,41)<0$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β ينتمي إلى المجال $]-1,42;-1,41[$.

الدّالّة f مستمرّة ورتيبة تماماً على المجال $]1,41;1,42[$ و) $f(1,42)\times f\ (1,41)<$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً λ ينتمي إلى المجال $]1,41;1,42[$.

6) التّمثيل البياني للدّالّة f موضح في الرّسم المرفق



$x=-1$
$x=1$
(C_f)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
2
3