وزارة التربية الوطنية

امتحان البكالوريا التجريبية

الشّعبة: علوم تجريبية.

اختبار في مادّة: الرّياضيات **المدّة: 3 سا و 30 دقيقة**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطة $A\left(-2;8;4\right)$ والشعاع $\vec{u}\left(1;5;-1\right)$

1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(d\right)$ الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}$.

2) نعتبر المستويين $\left(P\right)$ و $\left(Q\right)$ المعرّفين بمعادلتيهما على الترتيب: $\left(P\right): x-y-z=7$ و $\left(Q\right): x-2z=11$.

أ) بيّن أنّ المستويين $\left(P\right)$ و $\left(Q\right)$ يتقاطعان في مستقيم $\left(\Delta\right)$ يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب) بيّن أنّ المستقيمين $\left(d\right)$ و $\left(\Delta\right)$ ليسا من نفس المستوي.

3) H و H' نقطتان من الفضاء حيث: $H\left(-3;3;5\right)$ و $H'\left(3;0;-4\right)$.

أ) تحقق أن H تنتمي إلى $\left(d\right)$ و H' تنتمي إلى $\left(\Delta\right)$.

ب) برهن أنّ المستقيم $\left(HH'\right)$ عمودي على كل من المستقيمين $\left(d\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

ج) احسب المسافة بين المستقيمين $\left(d\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

4. عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}=126$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$؛ النقط A، B و C لاحقاتها:

$z_A=-1+i\sqrt{3}$، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$ على الترتيب.

أ) بيّن أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة $\left(\gamma\right)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثمّ أنشئ النقط A، B و C.

ب) بيّن أنّ $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$، ثم استنتج أنّ B هي صورة A بدوران مركزه C يطلب تعيين زاويته.

2) $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $z=2\left(-1+e^{i\theta}\right)$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

أ) بيّن أنّ $\left(\Gamma\right)$ هي دائرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها.

ب) تحقّق أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى $\left(\Gamma\right)$.

3) S التشابه المباشر الذي مركزه O، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\dfrac{\pi}{4}$.

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب) نسمي D صورة النقطة A بالتشابه S؛ بيّن أنّ لاحقة النقطة D هي: $z_D=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

ج) اكتب z_A ثم z_D على الشكل الأسّي واستنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر الدّالة العددية h المعرّفة على المجال $I=[0;1]$ بـ: $h(x)=2x-x^2$.

1) أ) بيّن أنّ الدّالة h متزايدة تماما على المجال I.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I فإنّ $h(x)$ ينتمي إلى I.

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $u_0=\frac{3}{7}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=h(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=1-u_n$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}={v_n}^2$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n={v_0}^{2^n}$.

جـ) استنتج u_n بدلالة n؛ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$.

1) ادرس تغيّرات الدالة g.

2) استنتج أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq 0$.

II) f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$ (حيث f' هي مشتقة الدّالة f)

جـ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ).

جـ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يُطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

4) أ) بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0{,}1<\alpha<0{,}2$.

ب) احسب $f(-1)$ ثمّ ارسم (T)، (Δ) و (C_f).

5) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا وحسب قيّم m عدد حلول المعادلة : $xe^{-x+2}-1-m=0$.

6) أ) بيّن أنّ الدالة $x\mapsto(-x-1)e^{-x+2}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمن اللذين معادلتيهما :

$x=2$ و $x=3$.

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، A، B، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+i$، $z_B=-1+3i$، $z_C=-3+i$ و $z_D=1+5i$.

1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A إلى C، عيّن z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h.

2) لتكن E مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;-1),(C;1)\right\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ) عيّن z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب.

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

3) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}$ على الشكل الأسّي.

ب) استنتج نسبة وزاوية التشابه S الذي يحول E إلى I ويحول D إلى A.

4) K نقطة من المستوي تحقق : $z_K-z_D=-2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(z_I-z_A\right)$.

أثبت أن K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له.

5) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $z-1-i=\frac{4}{\bar{z}-1+i}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

1) احسب u_2، u_3 و u_4.

2) أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n>0$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n).

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع $v_n=\frac{u_n}{n}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=\frac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x)-x\ln 2$.

أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس به خمس كريات حمراء تحمل الأعداد 2، 2، 2، -2، 3 وأربع كريات خضراء تحمل الأعداد 3، 3، 3 ، -2 وكرة زرقاء تحمل العدد -1 .

نسحب من الكيس بطريقة عشوائية كرتين في آن واحد.

1) احسب احتمال الحصول على:

أ) كرتين من نفس اللون

ب) كرتين من لونين مختلفين

ج) كرتين تحملان عددين جداؤهما سالب.

2) نعرّف من أجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغيّر العشوائي X كما يلي:

ـ اذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق له العدد نفسه

ـ إذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق له العدد الأكبر

أ) عيّن قيّم المتغيّر العشوائي X.

ب) عين قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1-x}{(x+1)^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

ب) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9<\alpha<4$.

جـ) ارسم (T) والمنحنى (C_f).

5) ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x-3m$.

6) F دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $F(x)=(-3-x)\ln(x+1)+3x$.

أ) بيّن أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$.

ـ بيّن أنّ : $A(\alpha)=4\left(\dfrac{\alpha^2-3\alpha}{\alpha+1}\right)cm^2$ ثم أوجد حصرا لـ $A(\alpha)$.

انتهى الموضوع الثاني