

على التلميذ أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول**التمرين الأول: (05 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نعتبر النقط:  $A(3;2;6)$ ،  $B(1;2;4)$ ،  $C(4;-2;5)$

(1) برهن النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  تعين مستويا . ثم بين أن المستوي  $(ABC)$  معادلته من الشكل:  $2x + y - 2z + 4 = 0$

(2) أ) ما طبيعة المثلث  $ABC$  ؟ . احسب مساحته

ب) احسب المسافة بين النقط  $O$  و المستوي  $(ABC)$  . ثم استنتج حجم رباعي الوجوه  $OABC$

(3) نعتبر  $G$  مرجح الجملة المنقلة  $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$  و  $I$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

\* بين أن النقط  $G$  تنتمي إلى المستقيم  $(OI)$ .

(4) لتكن  $(\Gamma)$  و  $(\Upsilon)$  مجموعتي النقط  $M$  من الفضاء حيث:

$$(\Upsilon): \|\overrightarrow{3OM} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 2 \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| \quad \text{و} \quad (\Gamma): \|\overrightarrow{3OM} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 6$$

أ) عين الطبيعة و العناصر المميزة لـ  $(\Gamma)$  و ادرس وضعيتها مع المستوي  $(ABC)$  .

ب) عين طبيعة المجموعة  $(\Upsilon)$  ثم استنتج معادلة ديكارتية لها .

**التمرين الثاني: (06 نقاط)**

(1) أ) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $\alpha$  حيث:  $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i$

ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لواحقها على الترتيب:

$$z_C = -z_A, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

أ) اكتب  $z_A$  على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للأعداد المركبة  $z_C$  و  $z_B$

ب) استنتج أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى دائرة يطلب مركزها و نصف قطرها . ثم علم النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$ .

$$L = \left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954} \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962} \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2016} \quad \text{ج) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب } L \text{ حيث:}$$

(3) ليكن  $f$  تحويل نقطي حيث:  $f(B) = A$  و  $f(O) = O$

أ) عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل  $f$ .

(ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث:  $(Z - Z_A)(\overline{Z - Z_A}) = Z_C \cdot \overline{Z_C}$   
 (ج) عين ثم أنشئ المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل f.  
**التمرين الثالث: (04.5 نقاط)**

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$   
 (1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_n > 1$  ( لاحظ أن :  $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2u_n}$  )  
 ب) بين أن  $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - 2u_n)}{2u_n}$  ، استنتج أن ( $u_n$ ) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة. عين نهايتها

(2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$   
 ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  . ثم عين نهاية ( $u_n$ ) .

(3) لتكن ( $v_n$ ) متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

أ) بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  . ثم اكتب عبارة  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة n

ب) احسب بدلالة n المجموع :  $S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

**التمرين الرابع: (06.5 نقاط)**

I ) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب:  $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$   
 (1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]1; \frac{3}{2}[$  . ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$

II ) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$

(Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

(2) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  . ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته  $y = x$  يقارب لـ (Cf) بجوار  $+\infty$  ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (Cf) و المستقيم ( $\Delta$ ) .

(4) بين أن :  $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$  . ثم أعط حصرا لـ  $f(\alpha)$  . أنشئ ( $\Delta$ ) و (Cf) .

(5) أ) جد دالة أصلية للدالة :  $\frac{1}{x} (1 - \ln x)$  .  $x \mapsto$

ب) احسب المساحة  $S(\alpha)$  مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (Cf) و المستقيمت  $y = x$  و  $x = 1$  و  $x = \alpha$

ج) تحقق أن :  $S(\alpha) = \frac{\alpha^2(2 - \alpha^2)}{2}$

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: ( 05 نقاط ) :** في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط  $A(1; 1; -3)$  ,  $B(2; 0; -2)$  ,  $C(-1; 2; 0)$  و الشعاع  $\vec{u}(2; 1; -1)$  .

(1) أ) عين تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  المار من النقطة  $C$  و شعاع توجيه له .

$$\text{ب) ليكن المستقيم } (D) \text{ المعرف بالجملة : } \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z - 4 = 0 \end{cases}$$

- بين أن الجملة:  $x = m + 1$  ,  $y = -m + 1$  ,  $z = m - 3$  ,  $m \in \mathbb{R}$  تمثل وسيطي لـ  $(D)$  و أن  $(D)$  هو المستقيم  $(AB)$  .

ج) بين أن المستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  ليس من نفس المستوي .

(2) لتكن النقطتين  $M(2t-1; t+2; -t)$  من  $(\Delta)$  و  $N(m+1; -m+1; m-3)$  من  $(D)$

أ) عين إحداثيات  $M$  و  $N$  بحيث يكون المستقيم  $(MN)$  عموديا على كل من  $(D)$  و  $(\Delta)$  .

ب) استنتج المسافة بين  $(D)$  و  $(\Delta)$  .

(3) لتكن  $M$  نقطة كيفية من  $(\Delta)$  و  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(t) = AM^2$

أ) بين أن  $f(t) = 6t^2 - 12t + 14$  . ب) ادرس تغيرات الدالة  $f$  .

ج) عين قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي من أجلها تكون المسافة  $AM$  أصغرية .

## التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ، (وحدة القياس :  $3Cm$ )

نعتبر النقط  $A, B, C$  لواحقها على الترتيب  $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  ,  $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$  ,  $z_C = z_A + z_B$  .

(1) أ) أكتب  $z_A$  ,  $z_B$  على الشكل الأسّي ثم  $z_C$  على الشكل الجبري ، و بين أن  $OACB$  مربع .

ب) أنشئ النقط  $A, B, C$  في المعلم السابق .

ج) أكتب العدد  $z_C$  على الشكل المثلثي ثم استنتج القيم المضبوطة لـ :  $\cos(\frac{7\pi}{12})$  ,  $\sin(\frac{7\pi}{12})$  ،

د) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $z_C^n$  عدد حقيقي موجب .

(2) ليكن  $f$  التحويل النقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة

$$z' = (1+i)z \quad \text{حيث :}$$

أ) بين أن  $f(A) = C$  و عين طبيعة التحويل  $f$  و عناصره المميزة .

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب  $z$  حيث  $z \neq 0$  فإن :  $\frac{z'-z}{z} = i$  ، استنتج طريقة لإنشاء النقطة  $M'$

ج) اثبت أنه من أجل كل عدد مركب  $z$  فإن :  $z' - z_C = (1+i)(z - z_A)$  .

- د) استنتج انه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى دائرة ( C ) مركزها A و نصف قطرها 1 فإن النقطة M' صورتها بالتحويل  $f$  تنتمي إلى دائرة ( C' ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .
- هـ) عين مجموعة النقط M ذات اللاقطة z بحيث يكون العدد  $\frac{z-z_A}{z}$  تخيلي صرف موجب .

**التمرين الثالث: ( 03 نقط )**

- يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء ( لا نفرق بينها عند اللمس ) .  
 نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الكيس .  
 (1) أحسب عدد الحالات الممكنة .  
 (2) أحسب احتمال الحادثتين A و B التاليتين :  
 A : " سحب كرة واحدة حمراء فقط " ، B : " الحصول على أربع كرات من نفس اللون "  
 (3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق عند السحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .  
 أ) أعط قانون الاحتمال لـ X . ب) أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـ X .

**التمرين الرابع: ( 07 نقط )**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$   
 $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  حيث :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm}$

**الجزء الأول :**

- (1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .  
 (2) بين أنه من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$  .  
 (3) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مقاربين أحدهما مائل  $(\Delta)$  معادلته  $y = x + 1$  .  
 (4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المقارب المائل  $(\Delta)$  .  
 (5) أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0 = -\ln(e-1)$  .  
 (6) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  .  
 (7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة  $m - \ln(1 + e^x) = 0$  .  
 (8) لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = f(|x|)$   
 أ) أثبت أن  $g$  زوجية . ب) اعتمادا على المنحنى  $(C_f)$  ، ارسم في نفس المعلم السابق منحنى الدالة  $g$  .

**الجزء الثاني :** (1) بين أنه من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) \geq x$  يكافئ أن  $x \leq -x_0$  .

(2) لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = \frac{1}{3}$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  ;  $n \in \mathbb{N}$

- أ) في المعلم السابق متل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  ، دون حسابها مبينا خطوط الرسم  
 ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب  $(u_n)$  ثم أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq -x_0$  .  
 ج) بين أن  $(u_n)$  متزايدة ، استنتج أنها متقاربة و عين نهايتها . \* بالتوفيق في بكالوريا 2016 \*