الشعبة: **رياضيات**

الامتحان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة : ماي 2016

اختبار في مادة : **الرياضيات** المدة: **04 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول : (20 نقطة)

التمرين الأول: (4 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$؛ (الوحدة cm).

نعتبر النقطتين A وB ذات اللاحقتين 2 و 3 على الترتيب

I. 1.حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2-4z+6=0$

2 . نعتبر النقطتين M_1 و M_2 ذات اللاحقتين $Z_1=2+i\sqrt{2}$ و $Z_2=2-i\sqrt{2}$ على الترتيب

✓ أكتب $\frac{Z_1-3}{Z_1}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المثلث $\mathrm{OBM_1}$ قائم

3. بين أن النقط O ; B ; $\mathrm{M_1}$ و$\mathrm{M_2}$ تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

✓ أرسم الدائرة (C) و عين النقطتين M_1 وM_2 على الرسم

II. نسمي fالى التحويل النقطي الذي يرفق كل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z^2-4z+6$

1. تحقق أن $z'-2=(Z-2)^2$

2. إذا كانت النقطة M ذات اللاحقة z نقطة من الدائرة(Γ) التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$

بين أن النقطة M' ذات اللاحقة z' تنتمي إلى دائرة (Γ')يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

III. نسمي D النقطة ذات اللاحقة $Z_D=2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ ونرمزبـ D' لصورة D بالتحويل f

1. بين أن النقطةDتنتمي إلى الدائرة (Γ)

2. عين القيس الرئيسي للزاوية $\left(\vec{u},\overrightarrow{AD'}\right)$ ثم عين النقطة D' على الرسم

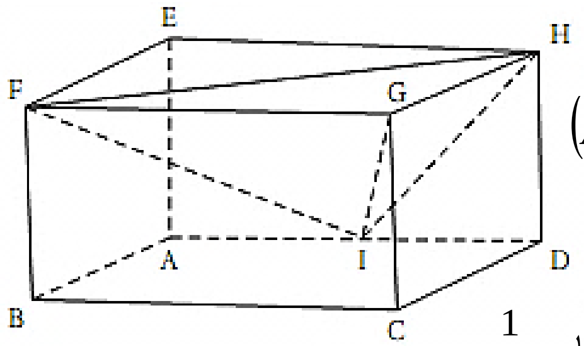
3. بين أن المثلث OAD' متقايس الأضلاع

التمرين الثاني: (4 نقاط)

1. نعتبر المعادلة (E) ....$24n - 13m = 1$ حيث n و m عددان صحيحان
   أ. برر أن المعادلة (E) تقبل على الاقل حلا
   ب. باستعمال خوارزمية اقليدس عين حل خاص المعادلة (E)
   ت. حل المعادلة (E)
2. نفرض أن n و m عددان طبيعيان حيث الثنائية $(n;m)$ حل للمعادلة (E)
   الهدف هو البحث عن $PGCD(8^{24n} - 1\ , 8^{13m} - 1\ )$
   أ. برر أن 7 يقسم كلا من $8^{13m} - 1$ و $8^{24n} - 1$
   ب. *بين ان* $(8^{24n} - 1) - 8(8^{13m} - 1) = 7$
   ت. *بين أن كل قاسم مشترك للعددين* $8^{13m} - 1$ و $8^{24n} - 1$ يقسم 7
   ث. *استنتج* $PGCD(8^{24n} - 1\ , 8^{13m} - 1\ )$
3. باستعمال النتيجة السابقة أحسب العدد d حيث $d = 9 \times PGCD(2^{437} - 32\ , 2^{434} - 32\ )$

التمرين الثالث:(4 نقاط)

نعتبر في الفضاء متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ حيث $AD = 2, AB = 1$ و $AE = 1$



نسمي I منتصف القطعة $[AD]$

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}\right)$

1. عين إحداثيات النقط F, G و H
2. نرمز بــ V لحجم رباعي الوجوه $GFIH$
   أ. بين ان الحجم V لرباعي الوجوه $GFIH$ يساوي $\frac{1}{3}$
   ب. بين ان المثلث FIH قائم في I
   ت. بالاستعانة بالحجم V أحسب المسافة d بين النقطة G و المستوي (FIH)
3. بين ان الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظيمي للمستوي (FIH)
4. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (FIH)
5. أحسب بطريقة أخرى المسافة d بين النقطة G و المستوي (FIH)
6. (Δ) المستقيم يشمل النقطة G وعمودي على المستوي (FIH)
   أ. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)
   ب. عين إحداثيات النقطة K نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (FIH)
7. عين العددين الحقيقين α و β حتى تكون النقطة K مرجح للجملة $\{(F.1)،(I.\alpha)،(H.\beta)\}$

8. لتكن $(\mathcal{S})$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MI}+3\,\overrightarrow{MH}\|=6$

أ. بين أن $(\mathcal{S})$ هي سطح كرة يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

ب. بين أن المستوي (FIH) يقطع سطح الكرة $(\mathcal{S})$ وفق الدائرة (C) يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

التمرين الرابع: (8 نقاط)

f الدالة المعرفة بــ $f(0)=2$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{-1+2\ln x}{\ln x}$

(C) منحني الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الأطوال $2cm$

1. ادرس استمرارية الدالة f عند $x=0$ على اليمين
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x=0$ على اليمين ثم فسر هندسيا النتيجة
3. عين نهاية الدالة f عند 1 و عند $+\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟
4. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول التغيرات.
5. بين أن النقطة A ذات الفاصلة $x_0=e^{-2}$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C) ؟
6. بين أن المنحني (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعين فاصلتها
7. نبحث عن المماسات (T_a) للمنحني (C) التي تشمل المبدأ O.

ليكن a عدد حقيقي من $]0;1[\cup]1;+\infty[$

أ. بين أن المماس (T_a) للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة a يشمل المبدأ إذا وفقط إذا كان $f(a)-af'(a)=0$

ب. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=f(x)-xf'(x)$

- ✓ بين أنه المعادلتين $g(x)=0$ و $2(\ln x)^2-\ln x-1=0$ متكافئتان على $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
- ✓ استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين يطلب تعينهما

ت. استنتج من الأسئلة السابقة أنه يوجد مماسين (T) و (T') للمنحني (C) يشملان المبدأ O *يطلب كتابة معادلة لكل منهما*

8. ارسم المماسين (T) و (T') ثم المنحني (C).
9. بقراءة بيانية ، عين عدد حلول المعادلة $(mx-2)\ln x+1=0$ حسب قيم العدد الحقيقي المعطى m
10. نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{f(x)-\frac{1}{e}x}{x}$

أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

ت. استنتج اشارة الدالة h

ث. أحسب D مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=e$ و $x=e^2$

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

التمرين الأول:(4 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ؛ (الوحدة $1cm$).

نعتبر النقط A، B و C ذات اللواحق $Z_A=2$ ، $Z_B=2+3i$ و $z_c=3i$ على الترتيب

1. لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة A بين أن لاحقة E هي $Z_E=4-3i$
2. عين العددين الحقيقيين α وβ حتى تكون النقطة F ذات اللاحقة $Z_F=6-i$ مرجح للجملة $\{(O.\alpha)،(A.\beta)،(B.1)\}$
3. نسمي S التشابه المباشر الذي يحول النقطة O إلى النقطة E ويحول النقطة A إلي النقطة F
   أ. عين الكتابة المركبة للتحويل S
   ب. عين مركز وزاوية ونسبة التشابه المباشر S
   ت. عين لاحقة النقطة G صورة النقطة F بالتشابه المباشر S
4. عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق
$\|6\overrightarrow{MO}-10\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=\frac{3}{2}\|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MC}\|$

✓ عين صورة المجموعة (Γ) بالتحويل S

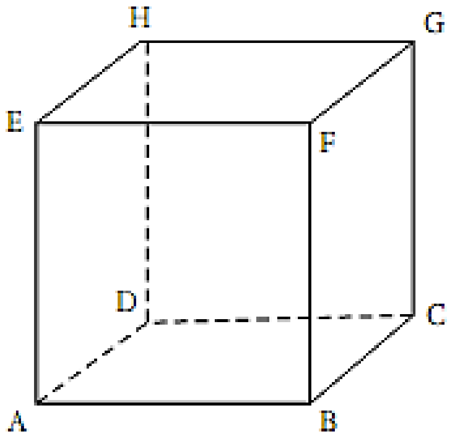
التمرين الثاني:(4 نقاط)

نعتبر المعادلة $x^2-2y^2=1 \ldots.(E)$ حيث x وy عددان طبيعيان غير معدومين

1. في هذا السؤال نفرض ان الثنائية (y_0,x_0) حل للمعادلة (E)
   أ. بين انه يوجد عدد طبيعي k بحيث $x_0=2k+1$
   ب. ا ستنتج حل للمعادلة (E) من اجل $1\leq x_0\leq 4$
2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بـ a_n و b_n الى الاعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق $(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$
   أ. أحسب a_1 و b_1
   ب. أكتب كلا من a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n
   ت. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدومn الثنائية (a_n,b_n) حل للمعادلة (E)
   ث. بين أن $\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{2}}=a_n-b_n\sqrt{2}$ ثم أستنتج ان $(3-2\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$
   ج. استنتج عبارة a_n و b_n بدلالة n

التمرين الثالث:(4 نقاط)

نعتبر في الفضاء مكعبا $ABCDEFGH$ طول حرفه 1



نرمز بـ K الى مرجح للجملة $\{(F.2)،(D.1)\}$

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$

الجزء الاول:

1. عين إحداثيات النقطة K
2. بين ان المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان
3. أحسب المسافة EK

الجزء الثاني:

لتكن M نقطة من القطعة $[HG]$ المستقيمة نضع $m = HM$ حيث m عدد حقيقي

ينتمي الى المجال $[0;1]$

1. بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من $[0;1]$ الحجم V لرباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$
2. بين ان المعادلة $(-1+m)x+y-mz=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (MFD)
3. نرمز بـ d_m للمسافة بين النقطة E و المستوي (MFD)

أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من $[0;1]$ $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

ب. عين وضعية النقطة M على القطعة $[HG]$ حتى تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن

ت. أحسب المسافة d_m الموافقة لهذه الوضعية

ث. عندما تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن استنتج المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD)

التمرين الرابع:(8 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أدرس قابلة اشتقاق الدالة f عند $x=0$ على اليمين ثم فسر هندسيا النتيجة
2. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم فسر هندسيا النتيجة .
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على $[0;+\infty[$ ثم *شكل جدول تغيراتها*.

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=f'(x)-1$

أ. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right]$

ب. استنتج أنه يوجد مماس واحد (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة α *معادلة*:

$$y=x+f(\alpha)-\alpha$$

ت. بين ان $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1-2\alpha}$ ثم استنتج ان $\dfrac{1}{7}\le f(\alpha)\le\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

5. أرسم المماس (T) ثم المنحني (C).

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

7. علما انه من اجل كل عدد حقيقي x : $e^x\ge x$

أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x)\le e^{\frac{-x}{2}}$

8. ليكن λ عدد حقيقي حيث $\lambda\ge 1$ نضع $S(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx$

أ. أعط تفسيرا هندسيا للعدد الحقيقي $S(\lambda)$

ب. بين انه من أجل كل $\lambda\ge 1$: $0\le S(\lambda)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$

9. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها العام

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $$u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$$

أ. بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $f(n+1)\le u_n\le f(n)$

ب. أحسب نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج .

10. نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $I_n=u_1+u_2+\dots+u_{n-1}$

أ. بين أن $I_n=S(n)$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n)

ت. هل المتتالية (I_n) متقاربة ؟