تصحيح

التمرين الاول

.I

.1

أ) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1 = 1$ ، $u_2 = 3$ ، $u_3 = 7$

ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$:

نبرهن بالتراجع على الخاصية $P(n)$ ($P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$)

المرحلة الأولى : من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ الخاصية $P(0)$ صحيحة

المرحلة الثانية : ليكن k عدد طبيعي كيفي

لنفترض أن الخاصية $P(k)$ صحيحة أي أن $u_k = 2^k - 1$ ، ونبرهن صحة الخاصية $P(k+1)$

لدينا : $u_{k+1} = 2u_k + 1$ ومنه: $u_{k+1} = 2\left(2^k - 1\right) + 1$ ومنه : $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

وبالتالي فان الخاصية $P(k+1)$ صحيحة

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n = 2^n - 1$

.2

أ) تبيين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q :

لدينا : $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$

ب) حساب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n :

$S_n = 2^{n+1} - 1$ ، $S'_n = 2^{n+1} + 2n + 1$ ، $S''_n = 2^{n+1} - (n+2)$

.II

.1 تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين u_n و u_n :

ليكن $p\gcd(u_n ; v_n) = d$ ومنه: d / u_n و d / v_n ومنه : $d / v_n - u_n$ ومنه : $d / 3$

وبالتالي القيم الممكنة لـ : $d \in D_3 = \{1 ; 3\}$

.2

أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3:

n	$2k$	$2k+1$
بواقي قسمة 2^n على 3	1	2

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $v_n \equiv 0[3]$:

لدينا : $v_n \equiv 0[3]$ معناه أن : $2^n \equiv -2[3]$ وبما أن: $-2 \equiv 1[3]$ إذن : $2^n \equiv 1[3]$

وبالتالي نجد : $n = 2k$; $k \in$

ج) استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$:

نعلم أن $v_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k$; $k \in$ وكذلك نجد أن : $u_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k'$; $k' \in$

أي في هذه الحالة نجد : $p\gcd(u_n ; v_n) = 3$ لكن القيم الممكنة لـ d هي : 3 او 1 إذن حتى

يكون $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$ يجب أن يكون $n = 2m + 1$; $m \in$

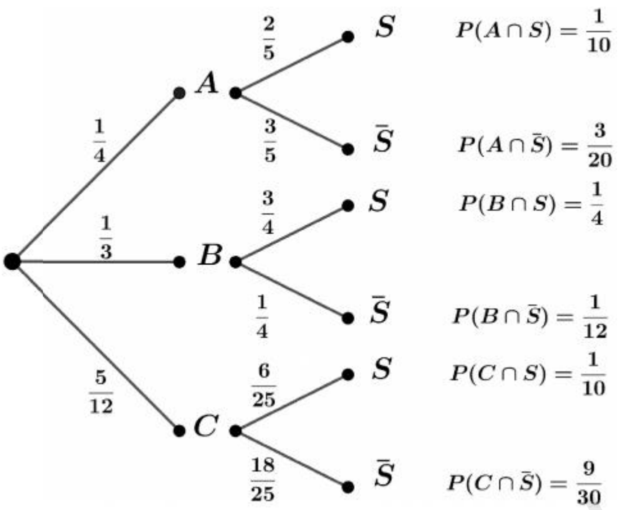
.3 تبيين انه من اجل كل n من فان $S''_n \equiv S'[3]$:

لدينا : $S''_n - S' = 3(n+1)$ تكافئ أن : $S''_n - S' = 0[3]$ تكافئ أن : $S''_n \equiv S'[3]$

الاحتمالات

التمرين الثاني

1. اكمال شجرة الاحتمالات:



2. حساب $P(S)$ احتمال تحقق الحادثة S:

$$P(S)=P(A\cap S)+P(B\cap S)+P(C\cap S)=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{9}{20}$$

3. حساب $P(\bar{S})$ احتمال تحقق الحادثة $\bar{S}$:

$$P(\bar{S})=P(A\cap \bar{S})+P(B\cap \bar{S})+P(C\cap \bar{S})=\frac{3}{20}+\frac{1}{12}+\frac{9}{30}=\frac{8}{15}$$

التمرين الثالث : ....

.I

حل في المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z+2-3i)(z^2-2z+10)=0$

$(z-+2-3i)(z^2-2z+10)=0$ تكافئ $z=-2+3i$ او $z^2-2z+10=0$

لنحل المعادلة $z^2-2z+10=0$:

لدينا $\Delta=-36=(6i)^2$ ومنه $z_1=\dfrac{2-6i}{2}$, $z_2=\dfrac{2+6i}{2}$

أي : $z_1=1-3i$, $z_2=1+3i$

وبالتالي نجد :

$(z-+2-3i)(z^2-2z+10)=0$ تكافئ $z\in\{-2+3i;1-3i;1+3i\}$

.II

1. أ) كتابة الشكل الجبري ، والشكل الاسي للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$:

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1-3i-1-3i}{-2+3i-1-3i}=\frac{-6i}{-3}=2i$$

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{®}{2}}$$

ب) ايجاد طبيعة التحويل النقطي T مع ذكر عناصره المميزة:

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{®}{2}}$ تكافئ $z_B-z_C=2e^{i\frac{®}{2}}(z_A-z_C)$

ومنه التحويل النقطي هو تشابه مباشر مركزه النقطة C و نسبته 2 و زاويته $\dfrac{®}{2}$

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $z_B-z_C=2e^{i\frac{®}{2}}(z_A-z_C)$ معناه : $|z_B-z_C|=2|z_A-z_C|$

معناه : $CB=2CA$

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{®}{2}}$ معناه: $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\dfrac{®}{2}+k\times2®\ ,k\in$

معناه : $(\overline{CA}\ ,\overline{CB})=\dfrac{®}{2}+k\times2®\quad ,\ k\in$

وبالتالي نجد ان المثلث ABC مثلث قائم في النقطة C

د) تبيين ان النقاط A ، B ، C تقع على دائرة (Γ) مع تحديد مركزها النقطة Ω ونصف قطرها r :

بما ان المثلث ABC قائم في النقطة C فان النقاط A ، B ، C تقع على دائرة (Γ) قطرها هو وتر للمثلث ABC أي ان القطعة $[AB]$ هي قطر للدائرة (Γ) وبالتالي فان النقطة Ω هي منتصف القطعة $[AB]$

لتكن z_Ω لاحقة النقطة Ω لدينا : $z_\Omega=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{-2+3i+1-3i}{2}=-\dfrac{1}{2}$

اذن $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ و $r=\dfrac{|z_B-z_A|}{2}=\dfrac{|1-3i+2-3i|}{2}=\dfrac{|3-6i|}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}u.m$

2. ا) تعيين وانشاء المجموعة النقط (Δ) :

$\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$ تكافئ $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$

معناه ان $AM = BM$

أي مجموعة النقط هي عبارة عن محور القطعة $[AB]$

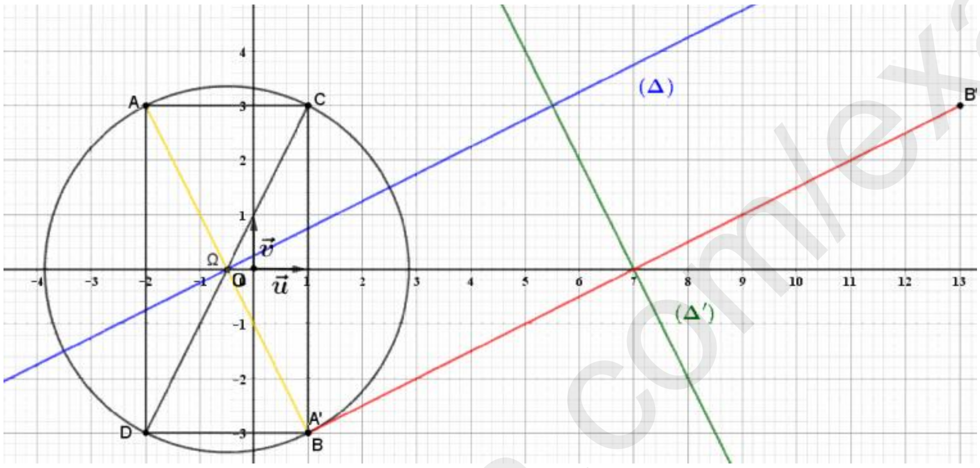
ب) تعيين وانشاء صورة المجموعة النقط (Δ) بالتحويل النقطي T:

لتكن النقط A' ، B' و M' حيث : $T(A)=A'$ ، $T(B)=B'$ و $T(M)=M'$

بما ان التحويل النقطي T هو تشابه مباشر فان : $\dfrac{B'M'}{BM}=\dfrac{A'M'}{AM}$ ومنه: $\dfrac{BM}{AM}=\dfrac{B'M'}{A'M'}$

أي: $\dfrac{B'M'}{A'M'}=1$ وبالتالي نجد : $A'M'=B'M'$

اي صورة مجموعة النقط $[AB]$ عبارة عن محور القطعة $[A'B']$



3. أ) تعيين لاحقة النقطة D :

النقطة D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$ معناه :

$z_C=\dfrac{z_A+z_B-z_D}{1+1-1}=z_A+z_B-z_D$ ومنه: $z_D=z_A+z_B-z_C$

أي : $z_D=-2+3i+1-3i-1-3i=-2-3i$

ب) تبيين ان النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω:

النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω معناه ان النقطة Ω منتصف القطعة $[CD]$

لدينا : $\dfrac{z_C+z_D}{2}=\dfrac{1+3i-2-3i}{2}=-\dfrac{1}{2}=z_\Omega$

اذن: النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω

ج) تعيين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$:

بما ان القطعتيين $[AB]$ ، $[CD]$ قطرا الرباعي $ADBC$ وكذلك قطرا للدائرة (Γ) ، و النقطتيين C ، D لا تنتميان الى (Δ) محور القطعة $[AB]$ لان $|z_C-z_A|\neq|z_C-z_B|$ و $|z_D-z_A|\neq|z_D-z_B|$

فان القطران $[AB]$ ، $[CD]$ متنصفان و متقايسان و غير متعامدان اذن الرباعي $ADBC$ مستطيل.

التمرين الرابع :

ا.

1. حساب نهايات الدالة عند اطراف مجموعة التعريف :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad ، \lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)=+\infty \;، \lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f(x)=-\infty \;، \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2. ا) بين أن المستقيم $(\mathscr{D})$ ذو المعادلة مستقيم $y=\dfrac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$ ، $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=0 \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=0$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين $\left(C_f\right)$ و $(\mathscr{D})$:

لدينا من اجل كل x من $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ ، $f(x)-\dfrac{1}{2}x=-\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

$f(x)-\dfrac{1}{2}x=0$ يكافئ $-\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=0$ يكافئ $\dfrac{x-1}{x}=1$ معناه $x-1=x$ أي $-1=1$

و هذا تناقض ، اذن من اجل كل x من $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ فان $\left(C_f\right)$ لايقطع $(\mathscr{D})$

$f(x)-\dfrac{1}{2}x<0$ يكافئ $\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)>0$ $\dfrac{x-1}{x}>1$ يكافئ $\dfrac{x-1}{x}-1>0$

يكافئ $\dfrac{-1}{x}>0$ يكافئ $-x>0$ يكافئ $x<0$

اذن من اجل كل x من $]-\infty\,;0[$ فان $\left(C_f\right)$ يقع تحت $(\mathscr{D})$

$f(x)-\dfrac{1}{2}x>0$ يكافئ $\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)<0$ يكافئ $\dfrac{x-1}{x}<1$ يكافئ $\dfrac{x-1}{x}-1<0$

يكافئ $\dfrac{-1}{x}<0$ يكافئ $-x<0$ يكافئ $x>0$

اذن من اجل كل x من $]1\,;+\infty[$ فان $\left(C_f\right)$ يقع فوق $(\mathscr{D})$

اذن $\left(C_f\right)$ يقع تحت (Δ)

3. أ) تبيين من اجل كل x من $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)'=\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x\,(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-x-2}{2x\,(x-1)}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجموعة $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ ، مع تشكيل جدول تغيراتها:

تشكيل جدول اشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		x
x^2-x-2		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$2x(x-1)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	▨	‖	$-$	0	$+$	

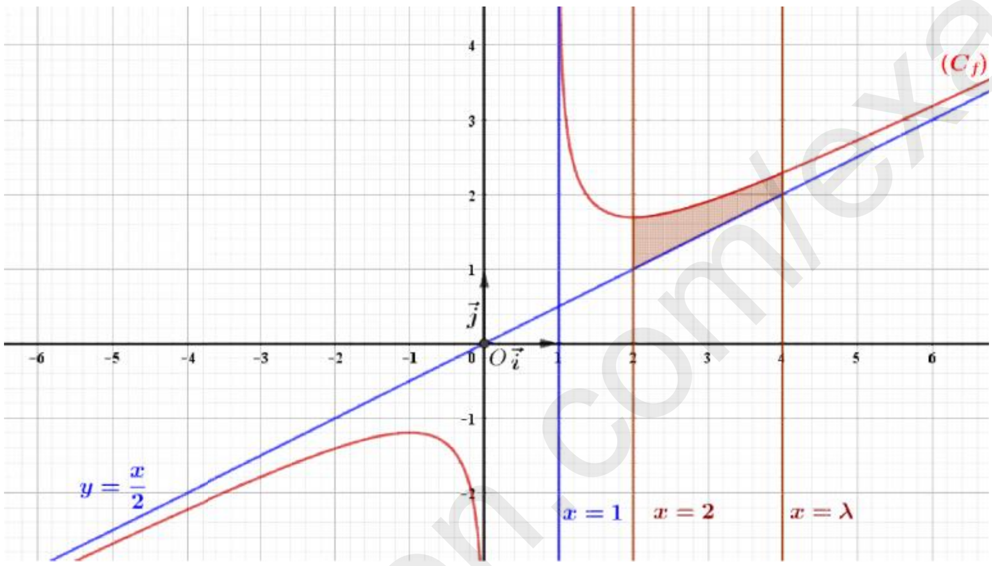
ومنه الدالة متزايدة تماما عاى كل من المجالين $]-\infty\,;-1]$ و $[2\,;+\infty[$ ، و متناقصة تماما على كل من المجالين $[-1\,;0[$ و $]1\,;2]$

الــدوال العدديـــة

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$1+\ln 2$	$\searrow -\infty$ ‖	‖ $+\infty \searrow$	$-\frac{1}{2}-\ln 2$	$\nearrow +\infty$

4. إنشاء (C_f) و المستقيمات المقاربة (Δ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$:



.II

1. $a\in$، تبيين ان الدالة $x\mapsto(x-a)\ln(x-a)-x$ دالة الاصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-a)$ على المجال $]a\ ;+\infty[$:

من اجل كل من المجال $]a\ ;+\infty[$ نضع : $H(x)=(x-a)\ln(x-a)-x$ و $h(x)=\ln(x-a)$

الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $]a\ ;+\infty[$ و

$$H'(x)=(x-a)\frac{1}{x-a}+\ln(x-a)-1=1+\ln(x-a)-1=\ln(x-a)=h(x)$$

ومنه الدالة H هي دالة اصلية للدالة h على المجال $]a\ ;+\infty[$.

2. حساب $\mathcal{A}(\alpha)$:

$$A(\alpha)=1\times1\int_2^{\alpha}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx=\int_2^{\alpha}-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx=\int_2^{\alpha}(\ln x-\ln(x-1))\,dx$$

$$A(\alpha)=\left[x\ln x-x-(x-1)\ln(x-1)+x\right]_2^{\alpha}=\alpha\ln\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)-2\ln 2\,cm^2$$

3. حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha\ln\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)-2\ln 2=+\infty$$

مجموعة الرياضيـــات بالجزائـــر