الحل النموذجي و سلم التنقط

الشعبة : تقني رياضي **بكالوريا التجريبي 2017**

الموضوع الأول

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) — 0.5

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ x = 1 + \alpha \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases} \quad , \quad \alpha \in R$$

ب) $\vec{u}_{(\Delta)}(6,-2,4)$ شعاع توجيه (Δ)

$\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}_{\Delta}$ غير مرتبطين لأن — 0.25

$$\frac{6}{-2} \neq \frac{-2}{1}$$

ندرس التقاطع

$$\begin{cases} 2 - 2\alpha = -2 + 6t \\ 1 + \alpha = 1 - 2t \\ 2 - 3\alpha = 4t \end{cases}$$

نجد $t = 2$ — 0.25

بالتعويض في الجملة (1) نجد

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \alpha = -4 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$ تناقض

ومنه α ليس وحيد اذن المستقيمان (AB) و (Δ) غير متقاطعان فهما ليسا من نفس المستوي

-2 (P) يشمل (AB) ويوازي (Δ) معناه

أ) تحقق ان $\vec{n}(1,5,1)$ ناظمي للمستوي (P) — 0.5

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$
$$\vec{n}.\ \vec{u_{\Delta}} = 0$$

ب) معادلة المستوي (P) :

$\vec{n}$ ناظمي لـ (P) معناه

$$(P):\ x + 5y + z + d = 0$$

بما أن $A \in (P)$ معناه :

$$2 + 5(1) + 2 + d = 0$$

$$d = -9$$ — 0.5

ومنه

$$(P):\ x + 5y + z - 9 = 0$$

ج) حساب المسافة بين (P) و (Δ)

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{|-2+6t+5(1-2t)+4t|}{\sqrt{1^2+5^2+1^2}}$$ — 0.5

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

-3 احداثيات I منتصف $[AB]$

$$I\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$ — 0.25

معادلة المستوي (Q) المحوري للقطعة $[AB]$

$$-2x + y - 3z + d = 0$$

(Q) يشمل النقطة I

$$d = 2$$

ومنه معادلة المستوي المحوري هي :

$$(Q): -2x + y - 3z + 2 = 0$$ — 0.5

-4 $MA^2 - MB^2 = 2$

التحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) معناه :

$$HA^2 = 5$$
$$HB^2 = 3$$
$$HA^2 - HB^2 = 5 - 3 = 2$$ — 0.25

ومنه $H \in (\Gamma)$

طبيعة المجموعة (Γ) حيث :

$$MA^2 - MB^2 = 2$$
$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 2$$
$$\left(2\,\overrightarrow{MI}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)\right) = 2$$
$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 1$$

تكافئ

$$\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI}\right) = 1$$

تكافئ

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI} = 1$$

بما أن $H \in (\Gamma)$ معناه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI} = 1$ ومنه نعوض نجد : — 0.5

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} + 1 = 1$$
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} = 0$$

وبالتالي (Γ) هي المستوي الذي يشمل H و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له

التمرين الثاني (04 نقط)

-1

$$5^6 = 15625$$
$$5^6 \equiv 1\,[7]$$ — 0.25

ندرس بواقي قسمة 5^n على 7

$$5^0 \equiv 1[7] \quad ,5^1 \equiv 5[7] \quad ,5^2 \equiv 4[7]$$
$$5^3 \equiv 6[7] \quad ,5^4 \equiv 2[7] \quad ,5^5 \equiv 3[7]$$
$$5^6 \equiv 1[7]$$ — 0.25

دورية و دورها $k = 6n$

$$5^6 \equiv 1[7]$$
$$5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$$
$$2016 = 6 \times 336 = 6n$$ — 0.25

-2 $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n و $4S_n = 5^{n+1}$

لذلك نحسب

$$S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \ldots 5^n$$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$

$$S_n = 1\left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right)$$ — 0.25

و منه $4S_n = 5^{n+1} - 1$ لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$ تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ يوجد (5, -4) بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه 5^n S_n , أوليان فيما بينهما ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$ لدينا $4S_n \equiv a\ [7]$ نضرب في 2 $8S_n \equiv 2a\ [7]$ $8 \equiv 1\ [7]$ ومنه $S_n \equiv 2a\ [7]$ العكس : بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فان $4\ S_n \equiv a\ [7]$ لدينا $S_n \equiv 2a\ [7]$ نضرب في العدد 4 $4S_n \equiv 8a\ [7]$ $8a \equiv a\ [7]$ $4\ S_n \equiv a\ [7]$ جـ) بين أن : $4\ S_{2015} \equiv 0\ [7]$ باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1\ [7]$ و منه $4\ S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1\ [7]$ $5^{2016} - 1 \equiv 0\ [7]$ $4\ S_{2015} \equiv 0\ [7]$ استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7 لدينا حسب ما سبق: $4\ S_{2015} \equiv 0\ [7]$ فان $S_{2015} \equiv 2 \times 0\ [7]$ ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0 د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n معناه: $S_n \equiv 0\ [7]$ $5^{n+1} - 1 \equiv 0\ [7]$ $5^{n+1} \equiv 1\ [7]$ $5^{n+1} \equiv 5^0\ [7]$ $n + 1 = 0,\ \ n = -1,$ مرفوضة -1 وهو المطلوب , $n + 1 = 6,\ \ n = 5$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.5
$S_n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ 3- حلول المعادلة (E) هي : $(x, y) = (KS_n + 5\ , -K \times 5^n - 4)\ ,\quad K \in \mathbb{Z}$ **التمرين الثالث(05 نقط)** 1- أ) $P(1) = 0$ ب) $\begin{cases} a = 2\cos\theta \\ b = 1 \end{cases}$ ج) حلول المعادلة هي: $S = \{1;\ -\cos(\theta) + i\sin(\theta)\ ; -\cos(\theta) - i\sin(\theta)\}$ 2- أ) الشكل المثلثي : $Z_A = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$ $\cos\ (\pi - \theta) = -\cos\theta$ $\sin\ (\pi - \theta) = \sin\theta$ $Z_B = \cos(\pi - \theta) + i \sin\ (\pi - \theta)$ $Z_C = \overline{Z_B}$ ومنه $Z_C = \cos(-\pi + \theta) + i \sin\ (-\pi + \theta)$ الشكل الأسي: $Z_A = e^{2i\pi}$ $Z_B = e^{i(\pi - \theta)}$ $Z_C = e^{i(-\pi + \theta)}$ بـ) طبيعة المثلث ABC $\|AC\| = [Z_C - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$ $\|AB\| = [Z_B - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$ ومنه المثلث متساوي الساقين نعين θ حتى يكون المثلث ABC قائم في A : الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ نجد $\theta = \frac{\pi}{2}$ جـ) $Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$ $Z_G = \frac{1 - 2\cos\theta}{3}$ د) المجموعة (Γ) حيث : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$ معناه $MG = MO$ ومنه (Γ) محور القطعة $[OG]$ حيث G مركز ثقل المثلث ABC 3- قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$ $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا معناه $\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$ حقيقيا أي $sin\frac{n\pi}{2} = 0$ ومنه $\frac{n\pi}{2} = k\pi$ و بالتالي: $n = 2k$ مع $k \in N$	01 0.25 0.5 0.5 .025 .025 .025 .075 .025 .025 .025 .025 .025 0.5 0.5

التمرين الرابع (07 نقط)

I.

1) المشتقة:

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$ 0.25

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$: 0.25

$g'(x) > 0$

ومنه الدالة متزايدة تماما

جدول التغيرات: 0.25

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	↗	

0.25

2) حساب : $g(0) = 0$ 0.25

اشارة: $g(x) > 0$ لما $x \in]0,+\infty[$

$g(x) < 0$ لما $x \in]-1,0[$

II.

1) النهايات: 0.25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ ; \ \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = +\infty$$ 0.25

$x = -1$ مستقيم مقارب

2) 0.5

أ) حساب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$ 0.25

ب) $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$ ومن ثم الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-1,0]$

جدول التغيرات 0.25

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0.25

ج) لدينا: $0 \le x \le 4$

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,4]$ فان

: $f(0) \le f(x) \le f(4)$

$$0 \le f(x) \le 4 - \frac{ln5}{5} \le 4$$ 0.25

د) $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - x] = 0$$

دراسة الوضعية: 0.25

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$		$-$
الوضعية	أعلى	يقطع	أسفل

3) التمثيل البياني (C_f) و (Δ)

4) حساب مساحة الحيز

$$A = \int_0^1 (x - f(x))\,dx$$ 0.25

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{Ln}(x+1)}{x+1}\,dx$$ 0.25

$$= \frac{1}{2}[[\mathrm{Ln}(x+1)]^2]_0^1$$ 0.25

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(2))^2$$

II.

2) باستعمال البرهان بالتراجع:

نتحقق من أجل $n = 0$ لدينا: $U_0 = 4$

$0 \le U_0 \le 4$

نفرض أن: $0 \le U_n \le 4$ 0.75

بما أن الدالة متزايدة على المجال $[0,4]$ فان:

$f(0) \le f(U_n) \le f(4)$

$0 \le f(U_n) \le 4$

حسب النتيجة 2) جـ) فان: $0 \le U_{n+1} \le 4$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فان: $0 \le U_n \le 4$

3) المتتالية (U_n) متناقصة لأن من أجل كل x من $[0,+\infty[$ 0.25

$f(x) - x \le 0$

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \le U_n \le 4$

فان: $f(U_n) - U_n \le 0$ أي $U_{n+1} - U_n \le 0$ 0.25

لدينا المتتالية (U_n) متناقصة و محدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

حساب

$$\lim_{n\to+\infty} U_n$$

المتتالية (U_n) متقاربة ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

و بما أن $U_{n+1} = f(U_n)$

والدالة f مستمرة على المجال $]-1,+\infty[$ فان: 0.25

$f(l) = l$

ومنه $f(l) - l = 0$

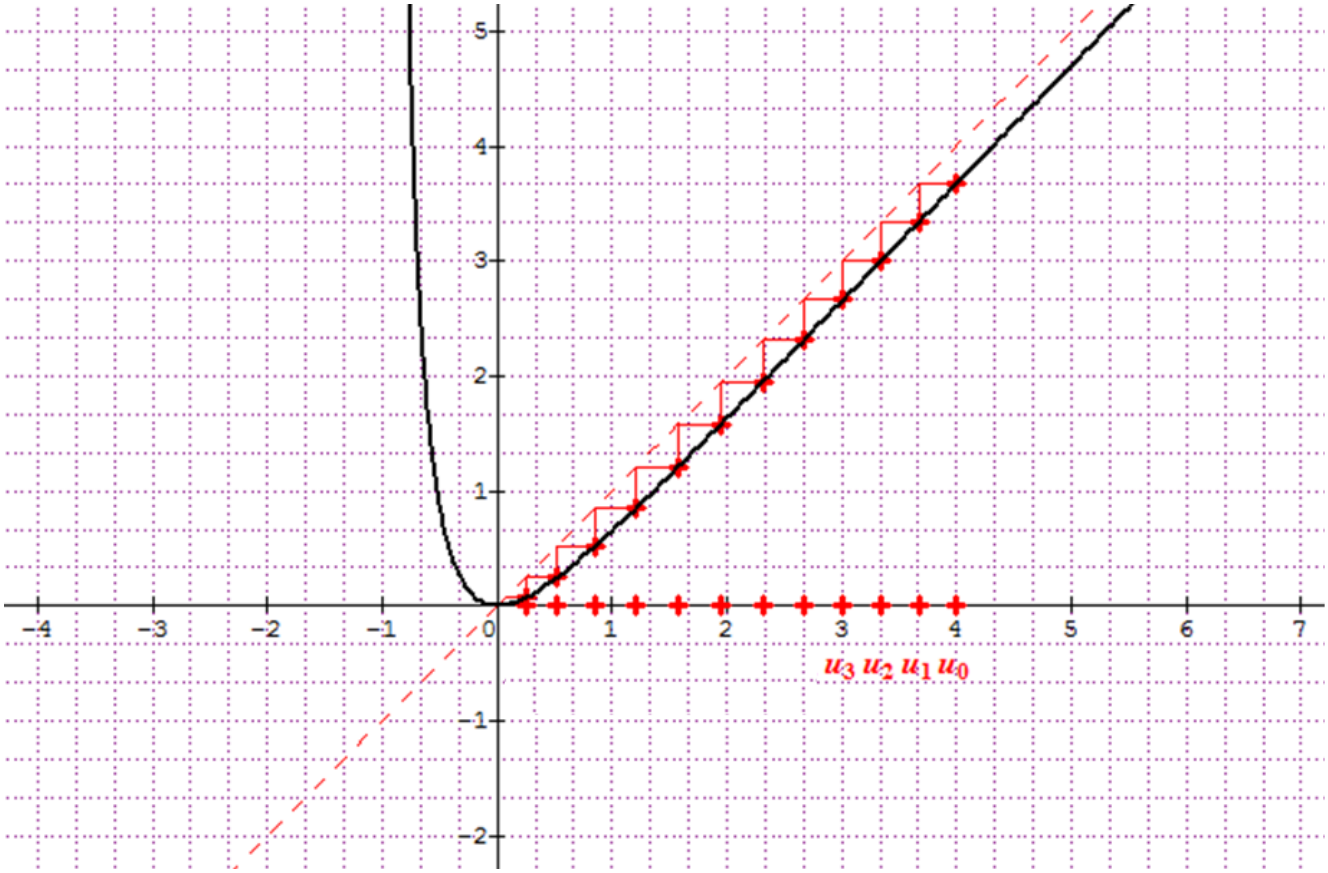
و حسب ما سبق $l = 0$ بالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

0.5

0.5

0.25



التمثيل البياني للتمرين الرابع للموضوع الأول

الحل النموذجي و سلم التنقط

الشعبة : تقني رياضي **بكالوريا التجريبي 2017**

الموضوع الثاني

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

$$U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+4} \quad ; \quad U_0=\frac{1}{4}$$

تعيين a و b في :

$$U_{n+1}=a+\frac{b}{U_n+4}$$

و منه :

$$U_{n+1}=\frac{a(U_n+4)+b}{U_n+4}$$

$$\begin{cases}a=3\\4a+b=2\end{cases} \quad \begin{cases}a=3\\b=-10\end{cases}$$

0.5

$$U_{n+1}=3-\frac{10}{U_n+4}$$

-2

أ) باستعمال البرهان بالتراجع

$$-2<U_n<1$$

نتحقق:

$$P(0):\ -2<U_0<1$$

نفرض:

$$-2<U_n<1$$

نبرهن أنها صحيحة ن أجل $n+1$

0.75

ب) المتتالية U_n متزايدة تماما على N لان:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-(U_n-1)(U_n+2)}{U_n+4}$$

وبما أن $U_n<1$ فإن $U_n-1<0$ و

$U_n>-2$ فإن $U_n+2>0$ فان

وعليه فان: $-(U_n-1)(U_n+2)>0$:

ولدينا كذلك $U_n+4>0$ ومن ثم فإن

$$U_{n+1}-U_n>0$$

0.75

جـ) المتتالية (U_n) متقاربة لأنها متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1

0.25

3) أ) (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ وحدها الأول $U_0=3$

0.5

ب) $V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$

0.25

$$U_n=\frac{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n}$$

0.25

ج) حساب المجموع:

$$V_0=3$$

$$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

.

$$V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

0.25

نعوض نجد :

$$S_n=\frac{1}{3}(1+2+2^2+\cdots+2^n)$$

$$S_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$$

0.5

التمرين الثاني (04 نقط)

1) $A\in(ABC)\ ;\ B\in(ABC)\ ;\ C\in(ABC)$ 0.75

2) $\begin{cases}x=k-2\\y=5k+8\\z=-k+4\end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$ 0.5

3)

أ) نحل الجملة $\begin{cases}x-2z-11=0\\x-y-z-7=0\end{cases}$ 0.5

ب) ندرس التوازي :

$\vec{u}(1,5,-1)$, $\vec{v}(2,1,1)$, $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{5}$ ومنه (T) و (Δ) غير متوازيان. 0.25

ندرس التقاطع معناه نحل الجملة:

$$\begin{cases}2t+11=k-2\\t+4=5k+8\\t=-k+4\end{cases}$$

0.5

نعوض t في المعادلة 2 نجد $k=0$ ثم نعوض في المعادلة 3 نجد $t=4$ ثم نعوض هذه القيم في المعادلة1 نجد : $19=-2$ و هذا مستحيل.

إذا (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4- أ)

$$E\in(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}3=11+2t\\0=4+t\\-4=t\end{cases}$$ 0.25

نجد t وحيد $\begin{cases}t=-4\\t=-4\\t=-4\end{cases}$

$$F\in(T)\Leftrightarrow\begin{cases}-3=k-2\\3=5k+8\\5=4-k\end{cases}$$

نجد k وحيد $\begin{cases}k=-1\\k=-1\\k=-1\end{cases}$ 0.25

ب) $(\Gamma):\ -6x+3y-9z+54-\alpha=0$ 0.5

و هي معادلة ديكارتيه للمستوي الذي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

جـ) $I\left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ منتصف القطعة $[EF]$.

$I\in(\Gamma)$ بعد التعويض نجد $\alpha=63$ 0.5

التمرين الثالث (05 نقاط)

1) أ) $P(\alpha i) = 0$ 0.25

نجد $\alpha = 1$ و منه $P(i) = 0$

ب)

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$ 0.5

حلول المعادلة هي:

$$\left\{ i; \frac{-\sqrt{3} - i}{2}; \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \right\}$$ 0.5

2) أ) نحسب: 0.25

$$|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = 1$$

ومنه النقط A, B, C تنتمي الى دائرة مركزها المبدأ O 0.25

ونصف قطرها 1

نبين أن

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \\ OA = OC \end{cases}$$ 0.5

ومنه الرباعي $OABC$ معين

3) أ) حساب

$$Z_2 = {Z_1}^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$ 0.25 0.25

التمثيل البياني

ب)باستعمال البرهان بالتراجع :

نتحقق : من أجل $n = 0$: $OA_0 = 1$ ومنه $A_0 \in (C)$ 0.5

نفرض أن: $A_n \in (C)$ ونبرهن أن $A_{n+1} \in (C)$ أي

$OA_{n+1} = 1$ لدينا $A_n \in (C)$ معناه :

$OA_n = 1$ أي $|Z_n| = |{Z_1}^n| = |Z_1|^n = 1$

$OA_{n+1} = |{Z_1}^{n+1}| = |{Z_1}^n| \times |Z_1| = 1$

ومنه النقط A_{n+1} تنتمي الى الدائرة (C)

جـ) نبرهن أن:

$$Z_{n+1} - Z_n = {Z_1}^{n+1} - {Z_1}^n$$ 0.25

$$= {Z_1}^n(Z_1 - 1)$$

$$= {Z_1}^n\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

د) 0.25

$$|Z_{n+1} - Z_n| = 1$$

المسافة:

$$A_n A_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_n| = 1$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n

$$OA_n = OA_{n+1} = 1$$ 0.25

و

$$A_n A_{n+1} = 1$$

و منه المثلثات OA_nA_{n+1} متقايسة الأضلاع .

4) أ) f تشابه مباشر مركزه النقطة A_0 ذات اللاحقة 1 نسبته2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ 0.5

ب) صورة المثلث OA_1A_2 هو المثلث $O'A'_1A'_2$ حيث

$$O' = f(O) \quad , \quad O'(0, \sqrt{3})$$ 0.5

$$A'_1 = f(A_1) \quad , \quad A'_1(2, \sqrt{3})$$

$$A'_2 = f(A_2) \quad , \quad A'_2(1, 2\sqrt{3})$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x) = e^{x-2} - 1$ 0.25

جدول التغيرات: 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘	0	↗

0.25

2) اشارة : $g(x) \geq 0$ 0.25

II.

1) أ) النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ 0.25

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$ 0.25

ب)

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$$ 0.25

جـ) وضعية C_f بالنسبة الى(d) 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية	أسفل	يقطع	أعلى

2) حساب المشتقة : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ 0.5

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة تماما علىR 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25

3) أ) معناه نحل المعادلة : $f(x) = 0$ 0.5

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

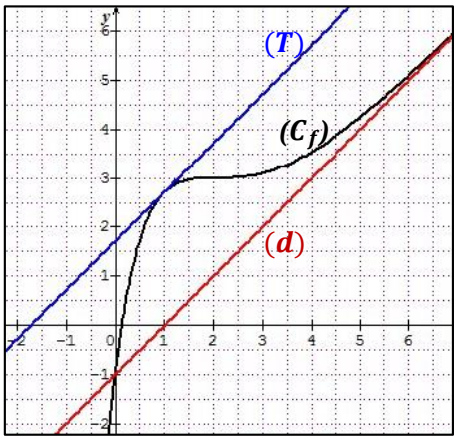
ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x) = 0$ 0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2,3)$

جـ) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d)هي: 0.5

$$y = x - 1 + e$$

5) التمثيل البياني



0.5 0.25 0.25

		5) <u>المناقشة البيانية:</u> $f(x) = x + m$ $m < -1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا $m = -1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم $-1 < m < e - 1$ حلين موجبين تماما $m = e - 1$ حلا واحدا موجبا $m = e - 1$ ليس لها حلول	0.5
		6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع : $U(x) = x$ و $V'(x) = e^{2-x}$ $H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$	0.5
		ب) حساب A: $A = \int_0^2 (f(x) - y)dx$ $A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}} dx = \int_0^2 xe^{2-x}\, dx$ $A = [H(x)]_0^2$ $A = H(2) - H(0)$ $A = (e^2 - 3)\ cm^2$	0.5