الموضوع الاول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

1- (أ) $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ $\overrightarrow{BC}(2,0,1)$

3× $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 4$

0.25 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\cdot BC\cos \widehat{ABC}$

$\cos \widehat{ABC} = 4/5$

2× $\cos^2 ABC + \sin^2 ABC = 1$ ومنه

0.25 $\sin ABC = 3/5$

ب/ مساحة المثلث ABC

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot BC \sin ABC$

0.5 $S_{ABC} = 3/2$ (و م)

2/ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

3× $(ABC): x+2y-2z-5=0$

0.25 3/ ABCD رباعي الوجوه

$D \notin (ABC)$

0.25 $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC}\, d(D,(ABC))$

0.25 $V_{ABCD} = \frac{2m+5}{6}$ (ح م)

4/ $(S_m): (x-0)^2+(y-0)^2+(z-m)^2=9$

2× (S_m) سطح كرة مركزها D وطول

0.25 نصف قطرها $R=3$

5/ (ABC) مماسا لـ (S_m)

$d(D,(ABC)) = R$

$m=2$ أي $\frac{2m+5}{3} = 3$

0.5 قيمة m هي 2

6/ معادلة لـ (P) الموازي لـ (ABC) ويمس (S_m)

$(P): x+2y-2z+d=0$

(ABC) يبعد عن (S_2) التي مركزها $D(0,0,2)$

(P) مماسا لـ (S_2) يعني $\frac{|-4+d|}{3}=3$

يعني $|-4+d|=9$ $(d=13)$ أو $(d=-5)$

0.5 معادلة لـ (P) هي

$x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني (04.5 نقاط)

01 1- $S=\{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 3+2i\sqrt{3}, 3-2i\sqrt{3}\}$

2/ A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$

0.5 $\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |i\sqrt{3}-3| = 2\sqrt{3}$

$\Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$

$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$

(C) دائرة مركزها $\Omega(3)$ وطول نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$

3/ (أ) بين أن

0.5 $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\pi/3}$

$z_E = -3+2i\sqrt{3}$ ومنه $z_B = 3-2i\sqrt{3}$

2× 0.25 $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

طبيعة المثلث BEC

0.25 لدينا: $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $BC=BE$ و $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$

0.5 المثلث BEC متقايس الأضلاع

ب/ $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\pi/3}$ يعني $z_C - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_B)$

0.5 يوجد دوران R مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ يحول النقطة E إلى C

14/ أ- طبيعة S وعناصره:

0,75 (S) تشابه مباشر مركزه ω حيث $z_\omega = -i\sqrt{3}$ وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2.

ب/ $z = 3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ معناه $z-3=2\sqrt{3}e^{i\theta}$

أي $|z-3|=2\sqrt{3}$ أي $\Omega M = 2\sqrt{3}$

0,5 مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها Ω وطول نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$

ت/ طبيعة (E') صورة (E) بـ S وعناصرها.

0,5 صورة الدائرة (E) بالتشابه S هي دائرة (C') مركزها Ω' صورة Ω بـ S وطول نصف قطرها $R'=2R=2.2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$z_{\Omega'} = 6-3i\sqrt{3}$

التمرين الثالث (04 نقاط)

عدد الحالات الممكنة:

$$C_8^3 = 56$$

0,5 (أ 1) $P_1 = \frac{C_4^3+C_4^3}{56} =$

0,5 (ب) $P_2 = \frac{C_4^3+C_3^3}{56} =$

0,5 ج/ $P_3 = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{56} =$

0,5 2/ قيم المتغير العشوائي X هي:

$\{0, 1, 2, 3\}$

3) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب/ الأمل الرياضياتي:

0,25 $E(X) = \frac{84}{56} = 1,5$

التباين:

0,25 $V(X) = \frac{15}{28}$

الانحراف المعياري:

0,25 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,73$

التمرين الرابع (07 نقاط)

الجزء الأول

0,25 1- $\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2- من أجل كل x من $]0,+\infty[$:

0,25 $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

0,25 الدالة g متناقصة تماما على $]0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ ومتزايدة تماما على $[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$

0,25

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	↗	$+\infty$

$g(\sqrt{2}/2) = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2 \simeq 1,85$

0,25 3- إشارة $g(x)$

الدالة g موجبة تماما على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

0,25 (1 أ/ $\lim_{x\to 0^{>}} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0,25 حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب لـ (C)

0,25 ب/ $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$

أ/1 الوضع النسبي لـ (C) و (Δ)

$$f(x) - y = \frac{\ln(x)}{x}$$

لما $0 < x < 1$ يكون (C) تحت (Δ)

لما $x > 1$ يكون (C) فوق (Δ) 0,5

لما $x = 1$ فإن $(C) \cap (\Delta) = \{(1, \frac{3}{2})\}$

2/أ- لما $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$ 0,5

ب- f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ 0,25

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

0,25

ج- معادلة للمستقيم (T) مماسا لـ (C) عند A

$$(T): y = 2x - \frac{1}{2}$$ 0,5

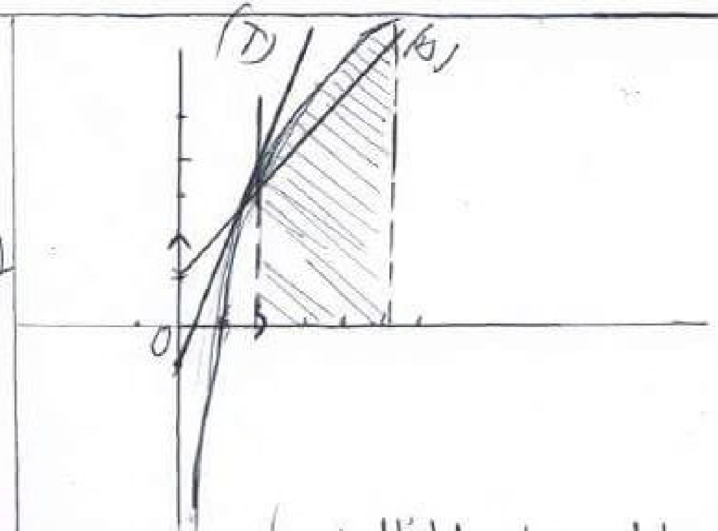
3/ $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]\frac{1}{2}, 1[$

$f(\frac{1}{2}) = 1 - 2\ln 2 \simeq -0,39$ و $f(1) = 3/2$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $[\frac{1}{2}, 1]$ و $f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$ 0,5

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد من $]\frac{1}{2}, 1[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$

/4



01

- الجزء الثالث -

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \; ; \; x > 0$$

2×0,25

1- حساب $h'(x)$ ماذا تستنتج؟

h دالة قابلة للإشتقاق لأنه من أجل كل x من D:

$$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \ln x$$

$$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

الإستنتاج $h'(x) = f(x), \; x > 0$

h دالة أصلية لـ f على D.

-2

$$S = \int_1^e f(x)\, dx \times 4\ cm^2$$

$$S = 4\,[h(x)]_1^e\ cm^2$$ 0,5

$$S = (2e^2 + 2e - 2)\ cm^2$$

$$S \simeq 18,21\ cm^2$$

- انتهى -

التمرين الأول (04 نقط)

1- دراسة بواقي قسمة 3^n على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n.

0,25 $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$

$3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^3 \equiv 7[10]$

$3^4 \equiv 1[10]$

$3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$

0,5 $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

$(k \in \mathbb{N})$

2- $33 \equiv 3[10]$ ومنه $33^{16n+2} \equiv 3^{16n+2}[10]$

$109 \equiv 9[10]$ ومنه $109^{8n+1} \equiv 9^{8n+1}[10]$

01 $33^{16n+2} \equiv 9[10]$ و $109^{8n+1} \equiv 9[10]$

و $11 \equiv 1[10]$ و $2 \times 109^{8n+1} \equiv 8[10]$

$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv (9-8-1)[10]$

$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$

3- ايجاد الأعداد الطبيعية n حيث $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$ و $10 \leq n \leq 25$

$n \equiv$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7\times3^{n+1}-1 \equiv$	0	2	8	6	$[10]$

قيم n هي $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

01 ومنه $10 \leq n \leq 25$ ومنه $\frac{10}{4} \leq k \leq \frac{25}{4}$

أي $k \in \{3,4,5,6\}$ وعليه قيم n هي: $\{12, 16, 20, 24\}$

4- أ) عبّر x و y

$0 < x < 3$ و $0 < y < 9$

$$\begin{cases} A = 2 + 1\times3^2 + 2\times3^3 + x\times3^5 + x\cdot3^6 \\ A = y + 7\times9 + 6\times9^2 + y\times9^3 \end{cases}$$

0,5 أي
$$\begin{cases} A = 65 + 972x \\ A = 549 + 730y \end{cases}$$

$972x - 730y = 484$

اذا كان $x=1$ فإن $y \notin \mathbb{N}$

اذا كان $x=2$ فإن $y=2$

$(x;y) = (2;2)$

0,25 ب- $A = 2009$

0,25 ج- $A = \overline{5600}_7$

التمرين الثاني (04 نقط)

1- أ) نتحقق أن:

$$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

0,25 $$z' = \frac{iz+i+1}{z+2} = \frac{i\left(z+1+\frac{1}{i}\right)}{z+2}$$

$$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

ب- M نقطة تنتمي إلى محور $[AB]$ معناه $AM = BM$

$$|z'| = \left|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right|$$

$$|z'| = \frac{|i||z+1-i|}{|z+2|}$$

0,5 ومنه $|z'| = \frac{|z-(-1+i)|}{|z-(-2)|}$

أي $OM' = \frac{BM}{AM} = 1$

M' تنتمي إلى دائرة (C) مركزها O و $R=1$

ع - طبيعة (E)

z' تخيليا صرفا معناه $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + \pi k$

و منه $\arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\arg(i) + \arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \pi/2 + \pi k$

0,5 $\arg\left[\frac{z-(-1+i)}{z-(-2)}\right] = \pi k$

وعليه $(\vec{AM}, \vec{BM}) = \pi k$

$(E) = (AB) - \{A, B\}$

2) أ - نتحقق أن $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$

$z' - i = \frac{i(z+1-i)}{z+2} - i$

0,25 $\boxed{z' - i = \frac{1-i}{z+2}}$

ب - الاستنتاج

* $|z'-i| = \left|\frac{1-i}{z+2}\right|$ ومنه $IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}$

0,25 أي $IM' \times AM = \sqrt{2}$

* $\arg(z'-i) = \arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$

أي $(\vec{u}, \vec{IM'}) = -\frac{\pi}{4} - (\vec{u}, \vec{AM})$

0,5 $(\vec{u}, \vec{IM'}) + (\vec{u}, \vec{AM}) = -\pi/4\ [2\pi]$

ج -

M نقطة من دائرة (Γ) ذات المركز A و طول نصف القطر 1 معناه 0,5

$AM = 1$

M' تنتمي الى مجموعة يطلب تعيينها:

نعلم $IM' \times AM = \sqrt{2}$ أي $IM' = \sqrt{2}$

وعليه M' تنتمي الى دائرة مركزها I و $R = \sqrt{2}$

أ - تبيان أن F تنتمي الى (Γ) و

نبين أن $(\vec{u}, \vec{AF}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

0,25 $AF = 1$ يعني F نقطة من (Γ) •

$AF = |z_F - z_A| = 1$

ومنه $F \in (\Gamma)$

• $(\vec{u}, \vec{AF}) = \arg(z_F - z_A)$

$= \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

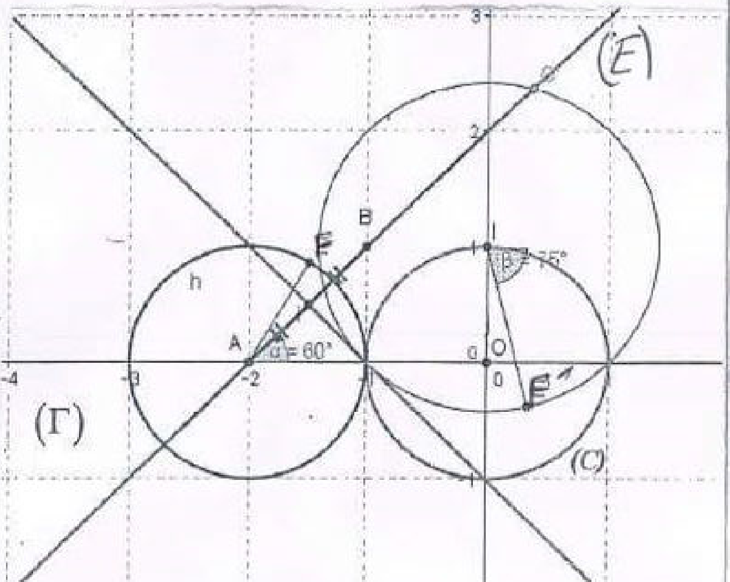
ب - انشاء النقطة F' حيث

0,5 $z_{F'} - i = \frac{1-i}{z_F + 2}$

لدينا من السؤال ②:

$FF' = \sqrt{2}$ و $(\vec{u}, \vec{IF'}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أي $(\vec{u}, \vec{IF'}) = -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$



0,5

الصفحة 2 من الموضوع 2

التمرين الثالث (04 نقاط)

1- $P(n): 0<u_n<1/2$ $n\in\mathbb{N}$

. $P(0)$: $0<u_0<1/2$ محققة

. نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبين صحة $P(n+1)$

لدينا : $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n<1/2$

نضرب في 2 :

$0<2u_n<1$

ومنه

0,5 $1<2u_n+1<2$

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$

ومنه $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$

أي

$0<u_{n+1}<1$

$P(n+1)$ صحيحة وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2- أ) $u_{n+1}-u_n=1-\frac{1}{2u_n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}$

0,25 $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

اتجاه تغير (u_n) :

لدينا مما سبق من أجل $n\in\mathbb{N}$:

$0<u_n<\frac{1}{2}$ يعني $u_n>0$ و $2u_n+1>0$

و $0<1-2u_n<1$

وعليه 0,25 $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب/ بما أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد $1/2$ فهي متقاربة. 0,5

نهايتها (u_n).

$\lim u_{n+1}=\lim u_n=l$ / $l\in\mathbb{R}$

$l=1-\frac{1}{2l+1}$

$2l^2-l=0$

$l=1/2$ أو $l=0$

0,5 بما أن (u_n) متزايدة تماما فإن $l=\frac{1}{2}$

3/ أ- $v_{n+1}=10v_n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها 10

0,5 وحدها الأول $v_0=-\frac{1}{3}$.

0,25 ب- $v_n=v_0\times q^n=\left(-\frac{1}{3}\right)10^n$

لدينا : $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه

$u_n=\frac{v_n}{2v_n-5^n}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)10^n}{2\left(-\frac{1}{3}\right)10^n-5^n}$

0,5 أي $u_n=\frac{10^n}{2\times10^n+3\cdot5^n}=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

0,25 $\lim u_n=\lim\frac{2^n}{2^n\left[2+\frac{3}{2^n}\right]}=\frac{1}{2}$

حساب S_n بدلالة n :

$S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\dots+\frac{1}{u_n}$

$\frac{1}{u_n}=\frac{2^{n+1}+3}{2^n}=2+\frac{3}{2^n}$

0,5 $S_n=\left(2+\frac{3}{2^0}\right)+\left(2+\frac{3}{2^1}\right)+\dots+\left(2+\frac{3}{2^n}\right)$

$S_n=2(n+1)+3\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)$

$S_n=2(n+1)+3\left[\frac{\left(1/2\right)^{n+1}-1}{1/2-1}\right]$

$S_n=2(n+1)-6\left[\left(1/2\right)^{n+1}-1\right]$

التمرين الرابع (08 نقاط)

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 0,25

بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x^2+1}{e^{-1}\times e^x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x - \underbrace{\frac{x^2}{e^{-1}e^x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{e^{-1}e^x}}_{\to 0}\right]$$

0,25 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب- f قابلة للإشتقاق على IR ومن أجل كل x من IR : 0,5

$$f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

ج- من أجل كل x من IR : $f'(x) > 0$ 0,25

وعليه f متزايدة تماما على IR

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$ 0,5	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2- $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -(x^2+1)e^{-x+1} = 0$

(Δ) مستقيم مقارب لـ (Cf) عند $(+\infty)$

• الوضع النسبي لـ (Cf) و (Δ)

$f(x) - y = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$

(Cf) يقع تحت (Δ) من أجل $x \in IR$

3 - $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $]1,8;1,9[$

0,5 $f(1,9) \simeq 0,03$ / $f(1,8) \simeq -0,11$

f مستمرة ورتيبة تماما على $[1,8;1,9]$

و $f(1,8)\times f(1,9) < 0$ حسب مبرهنة

القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا α من $]1,8;1,9[$.

0,5 4. $(T): y = x - 2$

5- f' دالة قابلة للإشتقاق على IR ومن أجل كل x من IR

$$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$$

$f''(x)=0$ تعني $(x=1)$ أو $(x=3)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

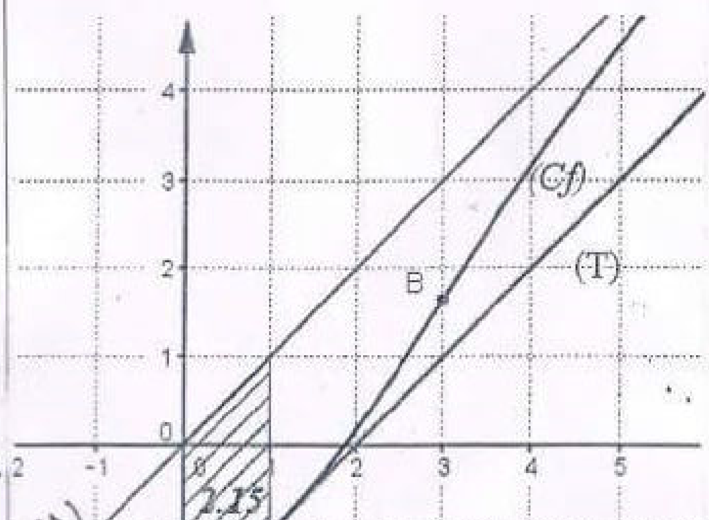
01 $f''(x)$ تنعدم عند كل $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها

$A(1,-1)$ و $B(3, 3-10e^{-2})$

نقطتي انعطاف لـ (Cf) .

6- $f(0) = -e$ ، $f(3) = 3 - 10e^{-2}$

01



7- المناقشة البيانية:

(E) ... $f(x)=x+m$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم معادلته $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) 0,5

• إذا كان $m\in]-\infty,-e[$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا سالبا.

• إذا كان $m=-e$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا معدوما.

• إذا كان: $m\in]-e,0[$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا موجبا

• إذا كان $m\in[0,+\infty[$ المعادلة (E) ليس لها حل.

- الجزء II -

1) أ) الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

0,5 $G'(x)=x e^{-x+1}$

وعليه G دالة أصلية للدالة $x\mapsto x e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) $I_1=\int_0^1 x e^{-x+1}\,dx$

0,25 $I_1=[G(x)]_0^1$

$I_1=-2+e$

2) أ) $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1}\,dx$

0,5 نضع $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$

$v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$

$I_{n+1}=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}\,dx$

$I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

ب) حساب I_2

$I_2=-1+2I_1$

$I_2=-1+2(e-2)$

0,25 $I_2=2e-5$

3- $S=\int_0^1 [y-f(x)]\,dx$

$S=\int_0^1 (x^2+1)e^{-x+1}\,dx$

0,5 $S=\int_0^1 x^2 e^{-x+1}\,dx+\int_0^1 e^{-x+1}\,dx$

$S=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$

$S=I_2+(-1+e)$

$S=2e-5-1+e=(3e-6)\,cm^2$

$S=(3e-6)\,cm^2=2,15\,cm^2$ 0,5

- انتهى -