تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 شعبة : علوم تجريبية

تصحيح الموضوع الاول

التمرين الأول :

I. حل المعادلة $(E):(z-2)(z^2+2z+4)=0$:

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ يكافئ $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

$z-2=0$ معناه $z=2$

- حل المعادلة $z^2+2z+4=0...(*)$

- حساب المميز : $\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$

نضع $\Delta=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$$z_1=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3} \quad ، \quad z_2=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\left\{2,-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\right\}$

II. لدينا : $z_A=-1+i\sqrt{3}, z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$

1- أ) تبيان أن : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

- لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}$

- ومنه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12}=\frac{6}{12}+i\frac{6\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- أي $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لان :

$$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC :

- لدينا : $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=1$ ومنه $\frac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$

ولدينا : $Arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ أي $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ومنه

ABC مثلث متقايس الأضلاع.

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC :

- لدينا : $|z_A|=2=OA$ ، $|z_B|=2=OB$ و $|z_C|=2=OC$

وبالتالي : $OA=OB=OC=2$ أي النقط B,A و C تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r=2$

2- أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق:

$$2\left(z+\bar{z}\right)+z\bar{z}=0$$

$2\left(z+\bar{z}\right)+z\bar{z}=0$ معناه $2\left(x+iy+x-iy\right)+x^2+y^2=0$

ومنه $x^2+y^2+4x=0$ وبالتالي : $\left(x+2\right)^2+y^2=4$

أي أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$.

ب) التحقق من أن A و B تنتميان إلى (Γ):

- لدينا : $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=\left|-1+i\sqrt{3}+2\right|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=2=r$

- ولدينا : $\Omega B=|z_B-z_\Omega|=\left|-1-i\sqrt{3}+2\right|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2=r$

وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ).

3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) تعيين صورة النقطة B بالدوران R:

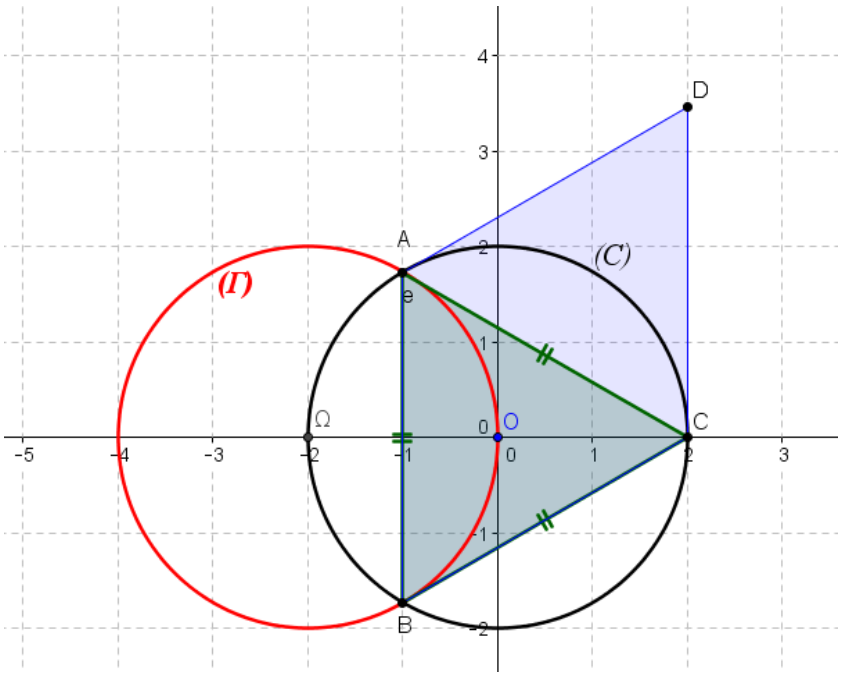
- لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$
- ولدينا : $a=cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}$ أي $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ولدينا كذلك : $b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=1+i\sqrt{3}$
- إذن : $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=2=z_C$

ومنه $R(B)=C$

أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R:

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+1+i\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$$

أي $z_D=2+2i\sqrt{3}$



- **استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:**

الرباعي $ABCD$ معين لأن :

- $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{\overrightarrow{AB}}=-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=2i\sqrt{3}$ و

$z_{\overrightarrow{DC}}=2+2i\sqrt{3}-2=2i\sqrt{3}$

أي $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}=2i\sqrt{3}$

ولدينا : $BC=CD$ لأن $R(B)=C$ و $R(C)=D$

ج) **صورة (Γ) بالدوران R :**

هي $(\mathscr{C})$ لأن $R(\Omega)=O$ و $R(B)=C$

التمرين الثاني :

$A(1;4;-5)$, $B(3;2;-4)$, $C(5;4;-3)$, $D(-2;8;4)$ و $\vec{u}(1;5;-1)$

1) تبيان أن $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي (ABC):

نعوض بإحداثيات النقط A,B,C في المعادلة السابقة نجد :

$$\begin{cases}1-2(-5)-11=11-11=0\\3-2(-4)-11=11-11=0\\5-2(-3)-11=11-11=0\end{cases}$$

ومنه $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي (ABC)

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$:

- أي $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (T).

$$(T):\begin{cases} x=t-2 \\ y=5t+8 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ y=-t+4 \end{cases}$$

3) لدينا : $(P): x-y-z=7$

أ) تبيان أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم

$$(\Delta):\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (ABC) نجد : $11+2t-2t-11=0$ ومنه $0t=0$.
- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (P) نجد : $11+2t-4-t-t-7=0$ أي $0t=0$

وبالتالي (Δ) محتوى في كل المستويين (ABC) و (P) فهما إذن متقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب) اثبات أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي :

- لدينا : $\frac{1}{1}\neq\frac{5}{-1}\neq\frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا أي أن (T) و (Δ) غير متوازيين . فهما إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

نحل الجملة $\begin{cases} 11+2t=t'-2...(1) \\ 4+t=5t'+8...(2) \\ t=-t'+4...(3) \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} t=4 \\ t'=0 \end{cases}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $11+2(4)=0-2$ (مستحيلة) ومنه (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

4) لدينا : $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$.

- **التحقق من أن $E\in(\Delta)$:**

نعوض بإحداثيات النقطة E في جملة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد :

$$\begin{cases} 3=11+2t \\ 0=4+t \\ t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$$

ومنه $E \in (\Delta)$

- **التحقق من أن $F \in (T)$:**

نعوض بإحداثيات النقطة F في جملة التمثيل الوسيطي لـ (T) نجد :

$$\begin{cases} -3 = t-2 \\ 3 = 5t+8 \\ 5 = -t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$$

ومنه $F \in (T)$

5) لدينا : $(S) : \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE} = \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$

أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (S) بدلالة α

- لدينا : $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE} = \alpha$ معناه $6(3-x)-3(-y)-9(-4-z) = \alpha$

أي $18-6x+3y+36+9z = \alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha = 0$

طبيعة المجموعة (S) : هي مستو شعاع ناظمي له $\vec{n}(-6;3;9)$

ب) تعيين قيمة α بحيث يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$:

- لدينا (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ معناه (S) يمر من منتصف $[FE]$ وليكن I

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

- إذن $y_I = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

$$z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2}$$

- بالتعويض في المعادلة السابقة نجد : $-6\times 0 + 3\times\frac{3}{2} + 9\times\frac{1}{2} + 54 - \alpha = 0$

أي $9+54-\alpha = 0$ وبالتالي $\alpha = 63$

التمرين الثالث

- لدينا : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- حساب u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{7}{3} ; u_2 = \frac{26}{9} ; u_3 = \frac{97}{27}$$

2- أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le n+3$

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

1) من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0 = 2$ وبالتالي $u_0 \le 3$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$.

2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $u_n \le n+3$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن : $u_{n+1} \le n+4$

- لدينا : $u_n \le n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n \le \frac{2}{3}(n+3)$ إذن $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 \le \frac{2}{3}(n+3)+\frac{1}{3}n+1$

وبالتالي : $u_{n+1} \le \frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$ أي $u_{n+1} \le n+3$ ومنه $u_{n+1} \le n+3 \le n+4$

إذن $u_{n+1} \le n+4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n = \frac{1}{3}(2u_n+n+3-3u_n) = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

- **استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):**

- لدينا : $u_n \le n+3$ ومنه $n+3-u_n \ge 0$ أي $\frac{1}{3}(n+3-u_n) \ge 0$

وبالتالي $u_{n+1}-u_n \ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

3- لدينا : $v_n = u_n - n$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) البرهان على أن المتتالية (v_n) هندسية :

- لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1}-(n+1) = \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1 = \frac{2}{3}(u_n-n)$

أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 0 = 2$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

- لدينا : $u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right] = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

لدينا : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

4) حساب S_n بدلالة n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + (1+2+\ldots+n) = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n}{2}(1+n)$$

وبالتالي $S_n = 2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = 2\times 3\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$

ومنه $S_n = 6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- **حساب النهايات :**

- لدينا : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+2}\right) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2} = +\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+e^2\times e^{-x} - e^2\times xe^{-x}\right) = 1$

- **حساب المشتقة :**

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+1} = (x-2)e^{-x+2}$$

- **جدول التغيرات**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\geq 0$:

- من أجل $x\in\mathbb{R}$ فان $g(x)\in[0;+\infty[$ ومنه $g(x)\geq 0$

لدينا : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$

1ـ حساب النهايات :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right) = -\infty$ لأن $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} xe^{-x+2} = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=+\infty$ لأن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{1}{e^{2}}=0\end{cases}$$

2ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=g(x)$

- **لدينا :** $f'(x)=1+e^{-x+2}-xe^{-x+2}=1+(1-x)e^{-x+2}=g(x)$

ومنه $f'(x)=g(x)$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$

- **جدول تغيرات الدالة f**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3ـحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x+2}=0$$

- **التفسير الهندسي :**

المستقيم ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

4ـدراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى $(\Delta): y=x-1$

- **ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:**

- **لدينا :** $f(x)-y=xe^{-x+2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f)	(C_f) فوق (Δ) يقطع (Δ)

5ـأ) تبيان أن النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) :

- لدينا : $f''(x)=g'(x)=(x-2)e^{-x+2}$
- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

المشتقة الثانية f'' تنعدم من

أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

ب) تبيان أن المنحني (C_f) في نقطة فاصلتها $0<x_0<0.2$:

- الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

- $f(0)=-1$ و $f(0.2)=0.2-1+0.2\times e^{-0.2+2}=-0.8+1.21=0.41$

ومنه $f(0)\times f(0.2)<0$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $0<x_0<0.2$

أي (C_f) **يقطع** $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0<x_0<0.2$

ج) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ):

(T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه المماس (T) يساوي 1

أي $f'(x)=1$ ومنه $g(x)=1$ وبالتالي : $1+(1-x)e^{-x+2}=1$

إذن : $(1-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

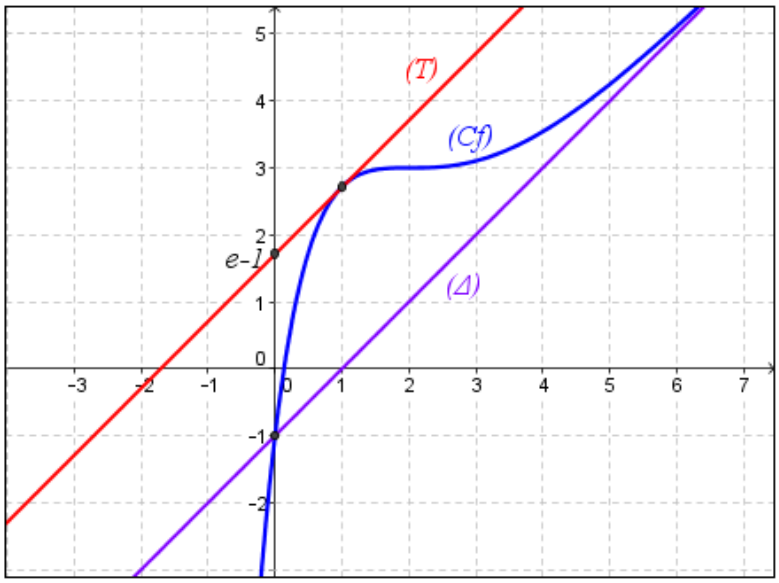
- **كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T):**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+e=x-1+e$ أي $(T): y=x-1+e$

د) حساب $f(-1)$:

$f(-1)=-1-1-e^3=-2-e^{-3}=-22.09$

الرسم :



6- المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$

$xe^{-x+2}-1-m=0$ معناه $xe^{-x+2}-1=m$

ومنه $x-1+xe^{-x+2}=x+m$ أي $f(x)=x+m$

- إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (Δ) و (T)
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .
- إذا كان $m\in]-1;e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $m=e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1.

إذا كان $m\in]e-1;+\infty[$ فان المعادلة ليس لها حل .

7- تبيان أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير :

- لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$

ومن $F'(x)=x-1-\left[e^{-x+2}+(1+x)\left(-e^{-x+2}\right)\right]=x-1-(1-1-x)e^{-x+2}$

$=x-1+xe^{-x+2}$

أي $F'(x)=f(x)$

- ولدينا : $F(3)=\frac{1}{2}\times 2^2-2-(1+2)e^{-2+2}+3=2-2-3e^0+3=-3+3=0$

وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير.

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول :

لدينا : $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) البرهان على أن المثلث ABC قائم :

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$

ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A .

2) البرهان على أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

- لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$
- نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$

وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A**

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل : $3x-3z+d=0$

- تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :

$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$

وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$

4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

- لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ وبالتالي

$\begin{cases}z+1+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases}$

نضع : $z=t$ وبالتالي : $(t\in\mathbb{R})$; $(\Delta):\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}$

5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

- **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$$

- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و

$$AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ $\qquad v_{ABCD}=27uv$

ج) تبيان أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}rad$:

- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$

- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\|\overrightarrow{DB}\|\times\|\overrightarrow{DC}\|\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ أي $cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $BDC=45^\circ$

د) حساب مساحة المثلث BDC :

- $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\,BDC=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$

- **استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC):**

لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d(A,(BCD))=\frac{1}{3}\times 27\times d(A,(BCD))=27$

ومنه $d(A,(BDC))=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ $\qquad d(A,(BDC))=3$

التمرين الثاني :

- لدينا : $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$

1) كتابة العددين z_1,z_2 على الشكل الأسي :

- لدينا : $|z_1|=\sqrt{(3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

- نضع : $\theta_1 = Arg(z_1)$ إذن $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

وبالتالي : $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

- لدينا : $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\right)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- نضع : $\theta_2 = Arg(z_2)$ إذن $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

وبالتالي : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) لدينا : $z_3 = z_1 + z_2$

أ) البرهان على أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين :

- لدينا : $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

- ومنه $\dfrac{OB}{OA} = 1$ أي $OB = OA$ و $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

أي أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ب) استنتاج أن الرباعي $OAEB$ مربع :

- لدينا :

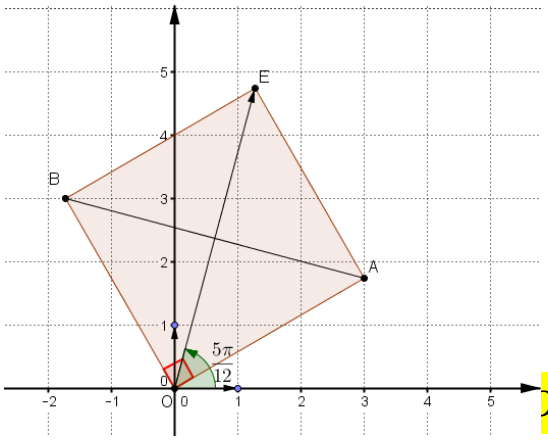
$z_{\overrightarrow{AE}} = z_1 + z_2 - z_1 = z_2$ و $z_{\overrightarrow{OB}} = z_2$

أي أن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$

ومنه الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع .

- ولدينا : OAB مثلث قائم ومتساوي الساقين

وبالتالي $OAEB$ مربع .



3) أ) تبيان أن $OE = 2\sqrt{6}$

- لدينا : $OE^2 = OA^2 + AE^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 + 12 = 24$

ومنه $OE = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

- تبيان أن $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{5\pi}{12}$:

- لدينا : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right)$

ومنه $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

ب) تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $cos\frac{5\pi}{12}$ و $sin\frac{5\pi}{12}$:

لدينا : $z_3 = z_1 + z_2 = 3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i = \left(3 - \sqrt{3}\right) + i\left(3 + \sqrt{3}\right)$

- ولدينا : $z_3 = 2\sqrt{6}\left(cos\frac{5\pi}{12} + i\,sin\frac{5\pi}{12}\right)$

بالمطابقة نجد :

$$cos\frac{5\pi}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

و

$$sin\frac{5\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ج) حساب z_3^{2016} :

$$z_3^{2016} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(cos\frac{2016 \times 5\pi}{12} + i\,sin\frac{2016 \times 5\pi}{12}\right)$$

$$= \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(cos840\pi + i\,sin840\pi\right)$$

أي $z_3^{2016} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}$

د) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون ، $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا :

$\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا معناه $\left(\cos\frac{5n\pi}{12}+i\sin\frac{5n\pi}{12}\right)$ حقيقيا

ومنه $\sin\frac{5n\pi}{12}=0$ وبالتالي $\frac{5n\pi}{12}=k\pi$ أي $5n\pi=12k\pi$

إذن $5n=12k$ ومنه $n=12\left(\frac{k}{5}\right)$ وبالتالي $n=12k'\left(k'\in\mathbb{N}\right)$

التمرين الثالث:

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1ـ التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

2ـ أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

نبرهن أن : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$.

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

• لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$.

• **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$

- ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$.

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

3ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) **اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :**

• لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

$$v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$$

أي $v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$

ب) **حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :**

- لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$
- استنتاج أن : $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه $\left(2v_n - 3^n\right)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن: $u_n = \frac{-\frac{1}{3} \times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3} \times 6^n\right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n}$

ومنه $u_n == -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3 \times 3^n}$ أي $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

- **الجزء الأول :**
- لدينا : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1- دراسة تغيرات الدالة g :

- **حساب النهايات :**

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(x^2 - 2\ln x\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^2 - 2\ln x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - 2\frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

- **حساب المشتقة :**

$$g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

- **دراسة إشارة المشتقة :**

x		1		$+\infty$
				0
$g'(x)$	$\Vert$ $-$	0	$+$	

- **جدول التغيرات :**

x	1	$+\infty$

		0
$g'(x)$	0	$+$ / $-$
$g(x)$	1 ↘	↗ $+\infty$ / $+\infty$

2- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0 / $+\infty$
$g(x)$	$+$

- **الجزء الثاني :**

- لدينا : $f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$

1- أ) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=-\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty\end{cases}$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$:

- **لدينا :** $f'(x)=-1-2\left[-\frac{1}{x^2}(1+\ln x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\right]=-1-2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)$

اي $f'(x)=\frac{-x^2+2\ln x}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : بما أن $g(x)>0$ فإن $f'(x)<0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $-$

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $-$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty \searrow -\infty$

2ـ أ) تبيان أن المستقيم $(\Delta): y=1-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

$$f(x)-y=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x=-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

- **جدول إشارة الفرق :**

$f(x)-y=0$ معناه $-\frac{2}{x}(1+\ln x)=0$

ومنه $1+\ln x=0$ أي $\ln x=-1$ وبالتالي $x=e^{-1}$.

x	e^{-1}		0		$+\infty$
$1+\ln x$		0		$+$	$-$
$f(x)-y$		0		$-$	$+$
الوضع النسبي		(C_f) فوق	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(Δ)

ج) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41<\alpha<0.42$:

- لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.41;0.42]$
- ولدينا : $f(0.41)=1-0.41-\frac{2}{0.41}(1+\ln 0.41)=0.06$

و $f(0.42)=1-0.42-\frac{2}{0.42}(1+\ln 0.42)=-0.05$

أي أن $f(0.41)\times f(0.42)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41<\alpha<0.42$

د) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ):

- (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي -1 أي $f'(x)=-1$

ومنه $-\frac{x^2-2\ln x}{x^2}=-1$ أي $x^2-2\ln x=x^2$

وبالتالي $-2\ln x=0$ إذن $\ln x=0$ ومنه $x=1$

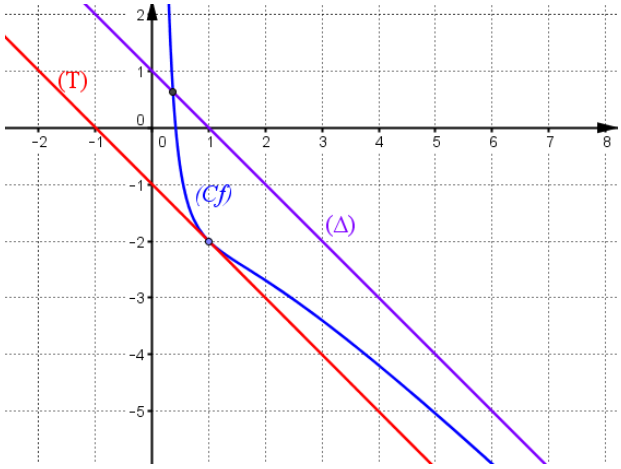
(T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$

- **كتابة معادلة ديكارتية للمماس** (T):

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-1(x-1)+(-2)=-x+1-2=-x-1$

أي $(T): y=-x-1$

- **الرسم:**



4) المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x)=m-x\,(m\in\mathbb{R})$:

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m-x$ الموازي لكل من (T) و (Δ)
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا هو $x=1$.
- إذا كان $m\in]-1;1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .

إذا كان $m\in[1;+\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا .

قالت إمرأة لزوجها وهي ترفع من شأنها: أنت كالشاي وأنا كالبسكوتة فلا طعم للشاي بدون بسكوتة.... فرد بهدوء قائلا: احذري أن تذوبي في الشاي فتختفين ويبقى الشاي يبحث عن بسكوتة أخرى.

سلطان