امتحان تجريبي في الرياضيات شعبة العلوم التجريبية

المدة : 3 ساعات ونصف

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقط A, B, C لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$.

1- أ) بين أن : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) عين طبيعة المثلث ABC .

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC .أرسم $(\mathcal{C})$.

2- أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ).

3- ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

التمرين الثاني :(05نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط

$C(5;4;-3), B(3;2;-4), A(1;4;-5)$

$D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

1) بيَن أن $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي (ABC).

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}$.

3) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة $x-y-z=7$.

أ) بين المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

ب) أثبت أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4) تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$. تحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ) و أن F تنتمي إلى (T).

5) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث، $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ) جد بدلالة α معادلة ديكارتية للمجموعة (S) و استنتج أن (S) مستو يطلب تعيين شعاع ناظمي له.

ب) عين قيمة α حتى يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

(u_n) المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

1ـ أحسب u_3,u_2,u_1.

2ـ ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\le n+3$.

ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-n$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4ـ نضع : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k$ و $T_n=\frac{S_n}{n^2}$

- أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\geq 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$.

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

4ـ أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-1$.

5ـ أ) بين أن $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

ب) بين ان المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0<x_0<0.2$.

ج) بين المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أحسب f(-1) ثم أرسم (T) ، (Δ) و (C_f).

6ـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$.

7ـ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم.

2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A.

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A.

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD.

ج) بين أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}$ rad.

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC).

التمرين الثاني :(04 نقاط)

نعتبر العددين المركبين z_1 و z_2 حيث ، $z_1 = 3+i\sqrt{3}$ و $z_2 = -\sqrt{3}+3i$.

1) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B, A و E التي لواحقها z_1 ، z_2 و $z_3 = z_1 + z_2$ على الترتيب.

أ) برهن أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ب) استنتج أن الرباعي OAEB مربع.

3) أ) بين أن : $OE = 2\sqrt{6}$ و أن $(\vec{u};\overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$.

ب) عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ج) أحسب z_3^{2016} .

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا .

التمرين الثالث :(04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$.

ب) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

- **الجزء الأول :**

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-2\ln x$.

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجال $]0;+\infty[$.

- **الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

ج) بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.41<\alpha<0.42$.

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f).

3ـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=m-x$.

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا