

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

- ثانوية السعيد عبد الحسي
(: 2016)

مديرية التربية لولاية الوادي
امتحان بالوريا التعليم الثانوي التجريبي
: تقني رياضي

الاجابة النموذجية لامتحان الباكلوريا التجريبية

التمرين الأول: (04)

(I) 1 اثبت أن العددين $A = 4k + 1$ و $B = 5k + 1$ أوليان فيما بينهما :

A B أوليان فيما بينهما يكافئ أن : $5A - 4B = 1$:

$$5(4k + 1) - 4(5k + 1) = 20k + 5 - 20k + 4 = 1$$

2 / أ عين حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (E) يحقق: $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E)

$$5x - 4y = 1 \text{ أي}$$

$$5(x - 1) - 4(y - 1) = 0 \text{ إذن:}$$

ومنه حسب غوص : $y = 5k + 1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $x = 4k + 1$

ب/ تحقق أن الثنائية (A, B) حل للمعادلة (E) : $5(4k + 1) - 4(5k + 1) = 1$ محققة

(II) 2 بين أن المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم (d):

لدينا: $\vec{n}_P \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\vec{n}_R \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ إذن $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R$ ومنه المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم

3 بين أن إحداثيات نقط المستقيم (d) تحقق المعادلة (E) ، ثم استنتج () مجموعة نقط المستقيم (d) ، التي إحداثياتها

أعداد صحيحة

$$\text{وبالجمع نجد: } \begin{cases} 4x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$5x - 4y - 1 = 0 \text{ هي المعادلة (E)}$$

بتعويض قيمة $x = 4k + 1$ و $y = 5k + 1$ في المعادلة الديكارتية للمستوي (P) أو (R) نجد : $z = 3k + 2$

ومنه المجموعة () هي :

$$(d): \begin{cases} x = 4k + 1 \\ y = 5k + 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases} \cdot (k \in \mathbb{Z})$$

التمرين الثاني: (4.5)

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$

$$L = \frac{\alpha + \beta i}{3 + 5i} = \frac{(\alpha + \beta i) \times (3 - 5i)}{(3 + 5i) \times (3 - 5i)} = \frac{(3\alpha + 5\beta)}{34} + i \frac{(3\beta - 5\alpha)}{34} = \frac{\bar{2}}{2} + i \frac{\bar{2}}{2}$$

$$\beta = 4\bar{2} \text{ و } \alpha = -\bar{2} \text{ وبحل جملة المعادلتين نجد: } \begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 17\bar{2} \\ 3\beta - 5\alpha = 17\bar{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \frac{3\alpha + 5\beta}{34} = \frac{\bar{2}}{2} \\ \frac{3\beta - 5\alpha}{34} = \frac{\bar{2}}{2} \end{cases} \text{ إذن:}$$

(2) / عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا:

لدينا: $L = e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن: $L^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ومنه: يكون L^n عددا حقيقيا موجبا إذا كان: $\arg(L) = 2k$

$$n = 8k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{وبالتالي} \quad \frac{n\pi}{4} = 2k\pi:$$

/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ، ثم احسب $(-\sqrt{2} + 4\bar{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$

$$L^{2016} = e^{i\frac{2016\pi}{4}} = e^{i8(252)\pi} = 1$$

$$\frac{(-\sqrt{2} + 4\bar{2}i)^{2016}}{(3 + 5i)^{2016}} = 1 \text{ إذن: } \left(\frac{-\sqrt{2} + 4\bar{2}i}{3 + 5i} \right)^{2016} = 1 \text{ أي } L^{2016} = 1 \text{ لدينا:}$$

ومنه نستلزم: $(-\sqrt{2} + 4\bar{2}i)^{2016} = (3 + 5i)^{2016}$ أي: $(-\sqrt{2} + 4\bar{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016} = 0$

/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

$$a = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-\bar{2} + 4\bar{2}i}{3 + 5i} = L = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ إذن: } (z_A - z_O) = a(z_B - z_O)$$

ومنه الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A زاويته $\frac{\pi}{4}$

/ استنتج طبيعة المثلث OBA: المثلث OBA مثلث متقايس الساقين

$$\text{/ بين أن: } AB = \sqrt{34(2 - \sqrt{2})}$$

$$AB = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2 + (5 - 4\bar{2})^2} = \sqrt{34(2 - \sqrt{2})}$$

$$(4) \text{ بين أن: } MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2})$$

$$= 2\overline{MG}^2 + 2\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = 2\overline{MG}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2} = 2MG^2 + \frac{(AB)^2}{2} = 2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2})$$

- عين مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

$$2MG^2 = 8 \text{ ومنه: } 2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2}) = 42 - 17\sqrt{2} \text{ أي: } MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$$

أي $MG = 2$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2

تمرين الثالث (4,5) نعتبر المتتالية U_n المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n \end{cases}$$

متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

1 / احسب U_2 و U_3 : $U_2 = \frac{1}{4(1+1)} U_1 = \frac{1}{32}$ $U_3 = \frac{2}{4(2+1)} U_2 = \frac{1}{384}$

/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

- $U_1 > 0 : n = 1$ القضية صحيحة $\frac{1}{4} > 0$

- ونثبت صحة القضية $U_n > 0$ و $U_{n+1} > 0$

- لدينا : $U_n > 0$ $n > 0$: $\frac{n}{4(n+1)} > 0$: $U_{n+1} > 0$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n > 0$

/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{4(n+1)} U_n - U_n = \frac{-3n-4}{4(n+1)} U_n < 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة ولكونها محدودة من الأسفل كذلك فهي متتالية متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

ومنه $f(x) = l$ تكافئ $\frac{n}{4(n+1)} l = l$ أي $l = 0$ $\frac{-3n-4}{4(n+1)}$

وبما $0 < \frac{-3n-4}{4(n+1)} < 1$ فإن $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

2 / بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_1 حيث: $V_n = n2^n U_n$

لدينا: $V_n = n2^n U_n$

اي: $V_{n+1} = (n+1)2^{n+1} U_{n+1}$

$$= (n+1)2^n \times 2 \frac{n}{4(n+1)} U_n$$

$$= \frac{1}{2} n2^n U_n$$

ومنه : $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ (V_n) متتالية هندسية أساسها $(q = \frac{1}{2})$ وحدها الاول: $V_1 = 1 \times 2 \times U_1 = \frac{1}{2}$

/ أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n) :

$$V_n = n2^n U_n \text{ ولدينا: } V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نستلزم أن : $U_n = \frac{1}{n2^{2n}}$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n2^{2n}} = 0$ وبالتالي متتالية متقاربة نحو 0

3 / احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

2/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \dots \times (nU_n)$

لدينا: $V_n = n2^n U_n$ أي $U_n = \frac{1}{n2^n} V_n$ وبالتعويض في P_n نجد:

$$P_n = \left(\frac{1}{2} V_1\right) \times \left(2 \times \frac{1}{2 \times 2^2} V_2\right) \times \left(3 \times \frac{1}{3 \times 2^3} V_3\right) \times \dots \times \left(n \times \frac{1}{n \times 2^n} V_n\right)$$

$$P_n = \left(\frac{V_1}{2}\right) \times \left(\frac{V_2}{2^2}\right) \times \left(\frac{V_3}{2^3}\right) \times \dots \times \left(\frac{V_n}{2^n}\right) \text{ أي:}$$

$$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ولدينا: } P_n = \frac{V_1 \times V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^n}$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)n} \text{ إذن:}$$

التمرين الرابع (07): نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + e^x - 1 = -1$ ومعه $y = -1$ معادلة لمستقيم مقارب افقي بجوار -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها:

نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها: $g(x) = e^x(x + 2)$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي: $g'(x) = 0$

إذا كان: $(x + 2) = 0$ أي $x = -2$

x	-	-2	+
$g(x)$	-	0	+

x	-	-2	+
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	$g(-2)$	+

3 $g(0)$ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x: g(x)$

$$g(0) = 0$$

x	-	0	+
$g(x)$	-	0	+

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

1 احسب نهايتي الدالة f : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +$

2 / بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = g(x)$

$$f'(x) = xe^x + e^x - 1 = g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

x	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	+	$f(0)$	+

3 / بين ان المستقيم () ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

هو مستقيم مقارب مائل بجوار -

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم ():

x	-	0	+
$f(x) + x$	-	0	+
الوضع النسبي	تحت (C_f) ()	يقطع (C_f) () في (0,0)	فوق (C_f) ()

4 / بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثيتها:

$$f'(x) = g(x) \text{ اذن } f''(x) = g'(x)$$

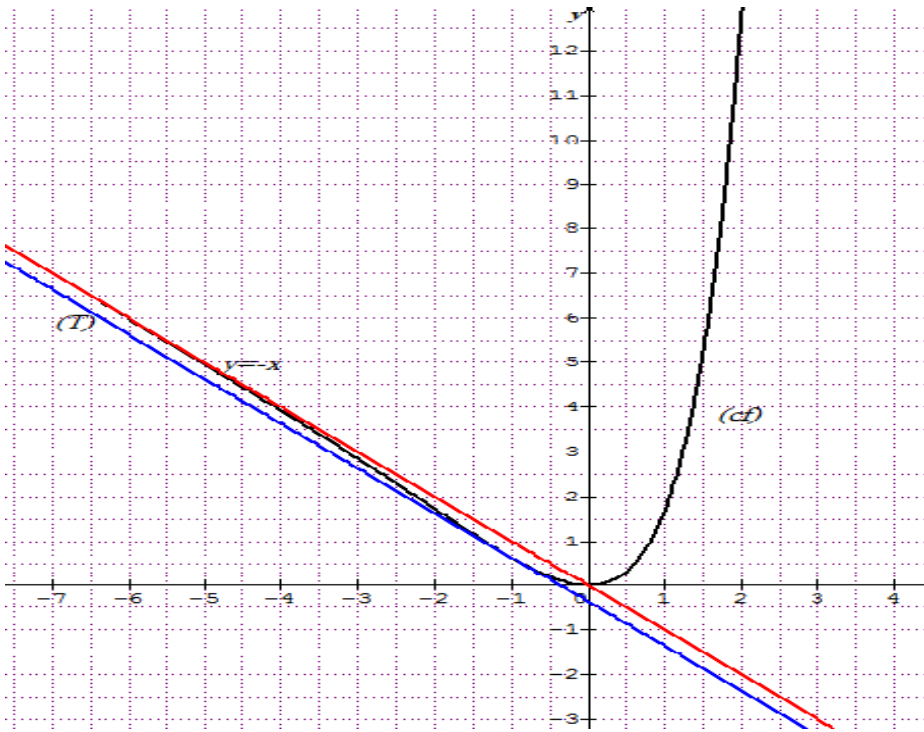
ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند $x = -2$ وهي: $w(-2, -2e^{-2} + 2)$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم () يطلب تعيين معادلة له:

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم () يعني أن: $f'(x) = -1$ أي: $x = -1$

$$(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) \text{ إذن } y_T = -x + 2 - e^{-1}$$

4 احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ () و المماس (T) و المنحنى (C_f)



4 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

$xe^x = m$ فمن اجل كل عدد حقيقي $m - x = m - x$ أي $xe^x - x = m - x$ أي $f(x) = -x + m$

m	-	e^{-1}	0	+
$f(x) = -x + m$	المعادلة لا تقبل حل	المعادلة تقبل حل مضاعف $x = -2$	المعادلة تقبل حلين سالبين	المعادلة تقبل حل موجب

5/a بين أن : $x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على \mathbb{R} :

$$((x-1)e^x)' = xe^x$$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم () والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 0$ و $x = -1$ مساحة الحيز هي :

$$\int_{-1}^0 [-x - f(x)] dx = \int_{-1}^0 [-xe^x] dx = - \int_{-1}^0 [xe^x] dx = -[(x-1)e^x]_{-1}^0 = 1 - 2e^{-1}$$

ومنه مساحة الحيز هي 0.624 وحدة مساحة

التمرين الأول: (04)

1 / اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB):

$$(AB): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = -2t + 2 \end{cases} \cdot (t \in \mathcal{R}) \quad \text{ومنه: } (AB): \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$$

ب/ اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (Q):

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta \dots\dots\dots (1) \\ \text{لدينا: } \begin{cases} y = 4\alpha - 2\beta + 1 \dots\dots\dots (2) \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \dots\dots\dots (3) \end{cases} & \text{ من } ((1) - (3)) \text{ نجد } \beta = \frac{x-z-2}{3} \end{aligned}$$

ومن (1) نجد: $\alpha = x - \beta = \frac{2x+z+2}{3}$ وبالتعويض في (2) نجد: $2x - y + 2z + 5 = 0$ (Q)

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB):

$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0$ إذن $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0$ ومنه المستويين (p) و (Q) متعامدان

(AB) (p) $2(t - 3) + 2(-2t + 3) - (-2t + 2) + 2 = 0 \quad 0 = 0$

() (Q) $2(t - 3) - (-2t + 3) + 2(-2t + 2) + 5 = 0 \quad 0 = 0$

2 أ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

المركز C هو نقطة تقاطع المستقيمين (CE) و (CF) ومنه: $\begin{cases} (CE): \overrightarrow{EM} = t\vec{n}_p \\ (CF): \overrightarrow{FM} = \lambda\vec{n}_Q \end{cases}$

إذن: $(CE): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \cdot (t \in \mathcal{R})$

و $(CF): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases} \cdot (\lambda \in \mathcal{R})$

$2t = 2\lambda$
 $2t = -\lambda + 3$
 $-t + 2 = 2\lambda - 1$
 (CF) (CE) يعني أن:

ومنه $t = \lambda = 1$ أي: $C(2, 2, 1)$ ونصف القطر $r = CE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2} = 3$

ب استنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q):

المسافة بين C والمستويين (p) و (Q) هي: $CE = CF = r = 3$

3 أ/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته

لدينا: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ أي $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة B

إذن: $S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3 \times 3 \sqrt{2}}{2} = \frac{9 \sqrt{2}}{2}$ (م. و) ²

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{EF} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{EF} \cdot \vec{BC} = 0 \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \text{ : بين أن } \vec{EF} \text{ عمودي على المستوى } (ABC)$$

c / احسب حجمي رباعي الوجوه ABCE و ABCF :

$$V_{ABCE} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times EI$$

$$\text{حيث } I \text{ منتصف } [EF] \quad V_{ABCF} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times FI$$

$$\text{إذن : } V_{ABCE} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2} (U.V)$$

$$\text{و } V_{ABCF} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2} (U.V)$$

_____ : يمكن حساب حجمي رباعي الوجوه ABCE و ABCF باعتبار ان : الارتفاع هو CE و CF والقاعدة هي المثلث

ABE و ABF على الترتيب

التمرين الثاني: (4,5) :

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z - 4 - 2i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 4 + 2i \\ Z^2 - 2Z + 2 = 0 \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} Z - 4 - 2i = 0 \\ Z^2 - 2Z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

$$Z^2 - 2Z + 2 = 0 \text{ نحسب المميز نجد : } -4 = 4i^2 \text{ ومنه } Z_1 = 1 + i \text{ و } Z_2 = 1 - i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $S = \{4 + 2i, 1 + i, 1 - i\}$

$$(2) \quad \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ / بين أن :}$$

ب/ استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

$$S_{BAC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{10}{4}}}{2} = \frac{10}{4} (\text{و.م})^2 \quad \text{ : المثلث BAC قائم في } B \text{ ومساحته :}$$

(3) / عين الكتابة المركبة للتشابه S :

$$\text{لدينا : } \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2}i \quad \text{ أي : } (Z_C - Z_B) = \frac{1}{2}i(Z_A - Z_B) \quad \text{ وبعد التبسيط نجد : } Z_C = \frac{1}{2}i Z_A + 5$$

$$\text{إذن العبارة المركبة للتشابه } S \text{ هي : } Z' = \frac{1}{2}i Z + 5$$

/ عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

$$Z_D = \frac{1}{2}i Z_C + 5 = \frac{19}{4} + i\frac{9}{4}$$

/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD ثم استنتج مساحة المثلث BCD

S تشابه مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ ويحول A إلى C ويحول C إلى D ومنه صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD

$$S_{BCD} = \frac{CB \times BD}{2} = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}BC}{2} = \frac{\frac{1}{4}AB \times BC}{2} = \frac{S_{BAC}}{4} = \frac{10}{16} (\text{و.م})^2$$

4 / عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة:

$$(E): (x - x_A)(x - x_D) + (y - y_A)(y - y_D) = 0 : \quad AD \text{ هي دائرة قطرها}$$

$$\text{ومنه : } (E): x^2 + y^2 - \frac{23}{4}x - \frac{13}{4}y + 7 = 0 \quad \text{وبالتالي هي دائرة مركزها } G\left(\frac{23}{8}; \frac{13}{4}\right) \text{ ونصف قطرها } \frac{7}{2}$$

ب/تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

$$C \quad (E) \quad \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{23}{4}\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 0 \quad \text{اي} \quad 0 = 0$$

ومنه المثلث ACD قائم في النقطة C

لتمرين (4,5):

$$\left. \begin{array}{l} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{2}{U_{n+1}} \end{array} \right\} \text{ نعتبر المتتالية } (u_n):$$

1 / تمثيل الحدود $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

/ ضع تخمينا حول رتبة المتتالية (U_n) وتقاربها

(U_n) متتالية غير رتيبة وهي متقاربة نحو العدد 1

/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

من التمثيل نستنتج المتتالية (U_{2n}) متتالية متناقصة والمتتالية (U_{2n+1}) متتالية متزايدة

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : U_n > 0$

من اجل $n = 0 : U_0 = 3 > 0$ أي 0 3 3 القضية صحيحة

نفرض أن $U_n > 0$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > 0$

لدينا : $U_n > 0$ ، وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد : $U_n + 1 > 1$ وبقلب طرفي المتباينة وضرب الطرفين

$$\text{في (2) نجد : } 1 > \frac{2}{U_{n+1}} \quad \frac{2}{4} \text{ أي } 1 > \frac{2}{U_{n+1}} \quad \text{ومنه : } U_{n+1} > \frac{1}{2} > 0$$

طبيعي $n : U_n > 0$

3 - بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يطلب تعيين حدّها الأول

$$\text{لدينا } V_n = \frac{U_n - 1}{U_{n+2}} \quad \text{ومنه} \quad V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 2}$$

$$V_{n+1} = \frac{-U_{n+1}}{2U_{n+1} + 4} : \quad V_{n+1} = \frac{\frac{2}{U_{n+1}} - 1}{\frac{2}{U_{n+1}} + 2}$$

$$V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n \quad V_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{U_n - 1}{U_{n+2}}\right) : \quad \text{خذ} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 2} = \frac{2}{5} \quad \text{وحدها الأول : } (q = -\frac{1}{2}) \quad \text{متتالية هندسية أساسها}$$

ب - أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n

$$U_n = \frac{2V_{n-1}}{V_{n-1}} \quad \text{نجد:} \quad V_n = \frac{U_{n-1}}{U_{n+2}} \quad \text{ومن العبارة} \quad V_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$U_n = \frac{\frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

إذن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ وماذا تستنتج؟

ومنه نستنتج أن : (U_n) متتالية متقاربة نحو العدد 1

التمرين الرابع : (07)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1 احسب نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x} = -\infty$$

2 ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0, +\infty[$:

$$x = 1 : \quad g'(x) = 0 \quad g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

لدينا من أجل كل $x \in]0, +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

• جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	+
$g'(x)$		+	0
$g(x)$			-

3 $g(x)$ $g(1)$

$$g(1) = 0$$

x	0	1	+
$g(x)$		-	0

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (\ln x)^2$

$$(t = \sqrt{x} \quad : \quad) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \quad / \quad \mathbf{1}$$

نضع : $t = \sqrt{x}$: $t^2 = x$ ومنه لما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln t}{t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) \right] = +\infty \quad / \quad \text{استنتج} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) : \quad 1 \quad 2$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} - 2 - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = f(x)$$

: $t + : x \rightarrow 0^+$ ومنه لما $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +$$

2 اعط تفسيراً بيانياً للنتائج : $x = 0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

3 بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$: $f(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

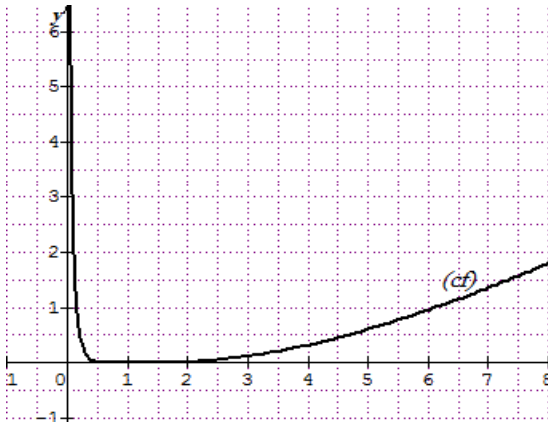
$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} = g(x) \times \frac{1}{x}$$

4 استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

ومنه من اجل كل $x \in]0, +\infty[$ فإن

اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$

x	0	1	+
$f'(x)$	+	0	-



5 ارسم المنحنى (C_f)

6 / اثبت أن : $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة : $\ln x$ على المجال $]0, +\infty[$:

$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

/ باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$:

$$\text{نضع : } \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ نجد : } \begin{cases} u'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \text{ اذن :}$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \frac{\ln x}{x} dx = [x(\ln x)^2]_1^e - 2[x \ln x - x]_1^e = e - 2$$

/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = 1$

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - 2 - (\ln x)^2 \right] dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln|x| - 2x \right]_1^e - (e - 2) = \frac{1}{2} e^2 - 3e + \frac{9}{2} = \frac{(e-3)^2}{2} \text{ و م.} \end{aligned}$$