الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط)

$A(-1,2,3)$ و $(\Delta):\begin{cases}x=9+4t\\ y=6+t.....t\in\Re\\ z=2+2t\end{cases}$

1)أ) إيجاد معادلة المستوي (P) : لدينا $(\Delta)\perp(P)$ ومنه

$\vec{u}_\Delta(4;1;2)$ شعاع توجيه (Δ) ناظمي للمستوي (P) 1

معادلته: $4x+y+2z+d=0$

$A(-1,2,3)\in(P)$ أي: $-4+2+6+d=0$ أي: $d=-4$

$\boxed{(P):4x+y+2z-4=0}$

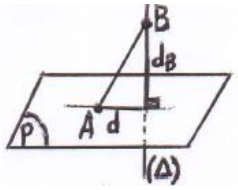
ب) التحقق أن $B(-3,3,-4)$ تنتمي إلى (Δ) : 0.5

$(\Delta):\begin{cases}-3=9+4t\\ 3=6+t\\ -4=2+2t\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}t=-3\\ t=-3\\ t=-3\end{cases}$ t وحيدة ، $B\in(\Delta)$

ج)حساب المسافة d_B بين B و (P) : 0.5

لدينا: $d_B=\dfrac{|-12+3-8-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\dfrac{21}{\sqrt{21}}=\dfrac{21\sqrt{21}}{21}=\sqrt{21}$

2)حساب المسافة d بين A و (Δ) :



$AB^2=d^2+d_B^2$

$d^2=AB^2-d_B^2$

$\boxed{d=\sqrt{AB^2-d_B^2}}$ 0.5

$AB=\sqrt{(-3+1)^2+(3-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{54}$

$d=\sqrt{54-21}$ نجد $\boxed{d=\sqrt{33}}$ 0.5

3)التعبير عن AM^2 بدلالة t :

$M\in(\Delta)$ ومنه $M(9+4t;6+t;2+2t)$

$AM=\sqrt{(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2}$

$AM=\sqrt{(4t+10)^2+(t+4)^2+(2t-1)^2}$

$AM=\sqrt{16t^2+80t+100+t^2+8t+16+4t^2-4t+1}$

$AM=\sqrt{21t^2+84t+117}$ 0.5

$\boxed{AM^2=21t^2+84t+117}$

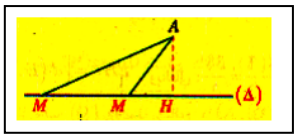
نضع : $f(t)=21t^2+84t+117$

لندرس اتجاه تغير f : $f^I(t)=42t+84$

$42t+84=0$ نجد $t=-2$

t	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$ ↘	33	↗ $+\infty$

من أجل $t=-2$ الطول AM أصغر ما يمكن



$AM^2=f(-2)=33$ 0.5

$AM=\sqrt{33}$ ومنه : $d=\sqrt{33}$

التمرين الثاني (4 نقاط)

$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\sqrt{4U_n}\end{cases}$

1)حساب u_2,u_1: $U_1=\sqrt{4U_0}=\sqrt{4}=2$ 0.5

$U_2=\sqrt{4U_1}=\sqrt{8}$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec U_n\prec 4$

* من اجل $n=0$: $0\prec U_0=1\prec 4$ ($P(0)$ محققة)

*نفرض أن $0\prec U_n\prec 4$ صحيحة و نبين أن: $0\prec U_{n+1}\prec 4$

لدينا : $0\prec U_n\prec 4$ ومنه: $0\prec 4U_n\prec 16$

إذن: $\sqrt{0}\prec\sqrt{4U_n}\prec\sqrt{16}$ 0.5

وبالتالي: $0\prec U_{n+1}\prec 4$

إذن $p(n+1)$ صحيحة

*الاستنتاج : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec U_n\prec 4$

ب) إتجاه تغير المتتالية (U_n)

$U_{n+1}-U_n=\sqrt{4U_n}-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\dfrac{(\sqrt{4U_n}-U_n)(\sqrt{4U_n}+U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$

$U_{n+1}-U_n=\dfrac{4U_n-U_n^2}{\sqrt{4U_n}+U_n}=\dfrac{U_n(4-U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$

لدينا : $U_n\prec 4$ ومنه: $4-U_n\succ 0$ 0.5

و لدينا : $U_n\succ 0$ ومنه: $\sqrt{4U_n}+U_n\succ 0$

ومنه: $U_{n+1}-U_n\succ 0$ إذن : (U_n) متزايدة 0.25

الاستنتاج: (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n=\ln(U_n)-\ln 4$

لدينا : $V_{n+1}=\ln(U_{n+1})-\ln 4$

$V_{n+1}=\ln(\sqrt{4U_n})-\ln 4$

$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$, $a\succ 0$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(4U_n)-\ln 4$

$\ln ab=\ln a+\ln b$, $a\succ 0, b\succ 0$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln(U_n)-\ln 4$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(U_n)-\frac{1}{2}\ln 4$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}[\ln(U_n)-\ln 4]$

$\boxed{V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n}$ (V_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ 0.5

و حدها الأول $V_0=\ln(U_0)-\ln 4$ نجد $\boxed{V_0=-\ln 4}$

ب) عبارة V_n : $V_n = V_0 \times q^n$

0.25 $\boxed{V_n = (-\ln 4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

عبارة U_n : $V_n = \ln(U_n) - \ln 4$

$\ln(U_n) = V_n + \ln 4$ نجد $U_n = e^{(v_n + \ln 4)}$

$U_n = e^{v_n} \times e^{\ln 4}$

0.25 $U_n = 4e^{-(\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 0.25

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 4}$ (لأن : $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$)

4) حساب: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

$S_n = V_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ نجد $S_n = (-\ln 4)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$

$S_n = (-2\ln 4)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ 0.5

$S_n = 4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$

حساب: $P_n = U_0 \times U_1 \times ..... \times U_n$

لدينا: $U_n = e^{(v_n + \ln 4)}$

$P_n = e^{v_0+\ln 4} \times e^{v_1+\ln 4} \times ..... \times e^{v_n+\ln 4}$

$P_n = e^{(v_0+v_1+.....v_n)+\underbrace{(\ln 4+\ln 4+...+\ln 4)}_{(n+1)\text{ مرة}}}$

$P_n = e^{(S_n)+(n+1)\ln 4}$ 0.5

$P_n = e^{4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+(n+1)\ln 4}$

التمرين الثالث(5نقاط)

$P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2}-1)Z^2 + 4(1-\sqrt{2})Z - 8$

1) $P(2) = 0$ 0.25

$P(Z) = (Z-2)(aZ^2 + bZ + c)$

$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 2aZ^2 - 2bZ - 2c$

$P(Z) = aZ^3 + (b-2a)Z^2 + (c-2b)Z - 2c$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2\sqrt{2} - 2 \\ c - 2b = 4 - 4\sqrt{2} \\ -2c = -8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \end{cases}$

0.5 $\boxed{P(Z) = (Z-2)(Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4)}$

2) $P(Z) = 0$

$Z = 2$ أو $Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$

$\Delta = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i(2\sqrt{2})$

$Z = \frac{-2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ أو $Z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$\boxed{Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ و $\boxed{Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$ 0.5

3) $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$ 0.25

الشكل الأسي: $Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$|Z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$

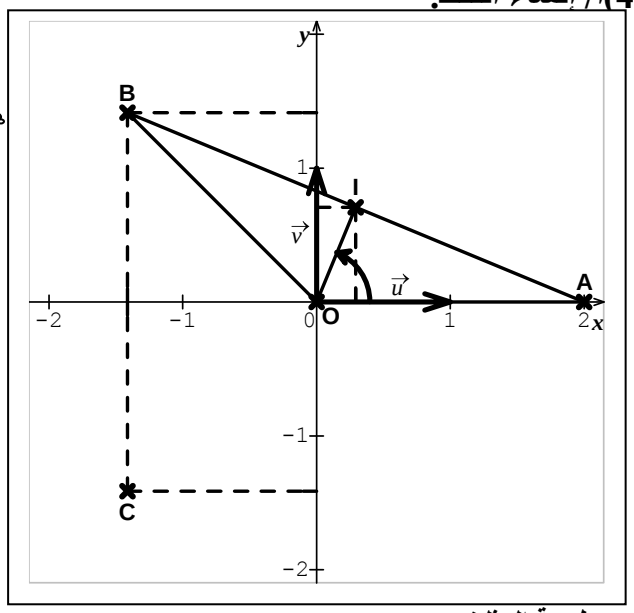
$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ و $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ إذن $\boxed{Z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ 0.5

$Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$|Z_2| = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ و $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ إذن $\boxed{Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ 0.5

4)أ/ إنشاء النقط: 0.5



ب) طبيعة المثلث OAB :

لدينا : $|Z_A| = |Z_B| = 2$ نجد $OB = OA = 2$ 0.25

OAB متقايس الضلعين

قيس $(\vec{U};\vec{OI})$: $\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ نجد $(\vec{OA};\vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$

$(\vec{U};\vec{OI}) = \frac{(\vec{OA};\vec{OB})}{2} = \frac{3\pi}{8}$ 0.5

لأن ($[OI)$ منصف الزاوية $(\vec{OA};\vec{OB})$)

ج)حساب Z_I لاحقة I منتصف $[AB]$:

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$$

0.5

$$Z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

كتابة Z_I على الشكل الأسي:

$$|Z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|Z_I| = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_I) = (\vec{U};\vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$$

0.5

$$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

استنتاج القيمة المضبوطة $\sin\frac{3\pi}{8}$ و $\cos\frac{3\pi}{8}$:

$$Z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}} \end{cases}$$

0.5

$$\begin{cases} \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

التمرين الرابع:7نقاط

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) \quad ، \quad D_f = \Re$$

1) أ) **إثبات أن:** $f(x) = x + \ln(1+2e^{-2x})$ 0.5

لدينا: $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(e^x(1+2e^{-2x})\right)$

$$f(x) = \ln(e^x) + \ln(1+2e^{-2x})$$

$$f(x) = x + \ln(1+2e^{-2x})$$

ب) **حساب** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x + \ln(1+2\underbrace{e^{-2x}}_{0})) = +\infty$$

إثبات أن $(D): y = x$ **مقارب مائل لـ** (C_f) 0.5

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}(\ln(1+2\underbrace{e^{-2x}}_{0})) = 0$$

ومنه (Δ)مقارب مائل لـ (C_f) **عند** $+\infty$

ج)دراسة الوضع النسبي (C_f) و (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x = \ln(1+2e^{-2x})$ 0.25

$1+2e^{-2x} \succ 1$ **لأن** $(2e^{-2x} \succ 0)$ **ومنه** $\ln(1+2e^{-2x}) \succ 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
إشارة الفرق	$+$
الوضع النسبي	(C_f) **فوق** (D)

2) أ) **إثبات أن:** $f(x) = -x + \ln(2+e^{2x})$

لدينا: $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(e^{-x}(e^{2x}+2)\right)$

$$f(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(2+e^{2x})$$

0.5

$$f(x) = -x + \ln(2+e^{2x})$$

ب) **حساب** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x + \ln(2+\underbrace{e^{2x}}_{0})) = +\infty$$

إثبات أن $(D'): y = -x + \ln 2$ **مقارب مائل لـ** (C_f)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+\ln 2)] = \lim_{x\to-\infty}(-x + \ln(2+e^{2x}) + x - \ln 2)$$

0.5

$$= \lim_{x\to-\infty}(\ln(2+\underbrace{e^{2x}}_{0}) - \ln 2) = \ln 2 - \ln 2 = 0$$

ومنه (D')مقارب مائل لـ (C_f) **عند** $-\infty$

ج)دراسة الوضع النسبي (C_f) و (D'):

ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - (-x+\ln 2) = \ln(2+e^{2x}) - \ln 2$$

$$f(x) - (-x+\ln 2) = \ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right)$$

0.25

$$f(x) - (-x+\ln 2) = \ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$1+\frac{1}{2}e^{2x} \succ 1$ **لأن** $\left(\frac{1}{2}e^{2x} \succ 0\right)$ **ومنه** $\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right) \succ 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
إشارة الفرق	$+$
الوضع النسبي	(C_f) **فوق** (D')

3)حساب المشتق:

0.5

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-2)}{e^x + 2e^{-x}}$$

اشارة المشتق:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{2x}-2$

لأن ($e^{-x}\succ 0$ و $e^{x}+2e^{-x}\succ 0$)

$e^{2x}-2\geq 0$ نجد $e^{2x}\geq 2$

$2x\geq \ln 2$ نجد $x\geq \frac{\ln 2}{2}$

وبنفس الطريقة: $e^{2x}-2\leq 0$ نجد $x\leq \frac{\ln 2}{2}$ 0.5

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f متناقصة على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$ ومتزايدة على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

2) جدول تغيرات f : 0.5

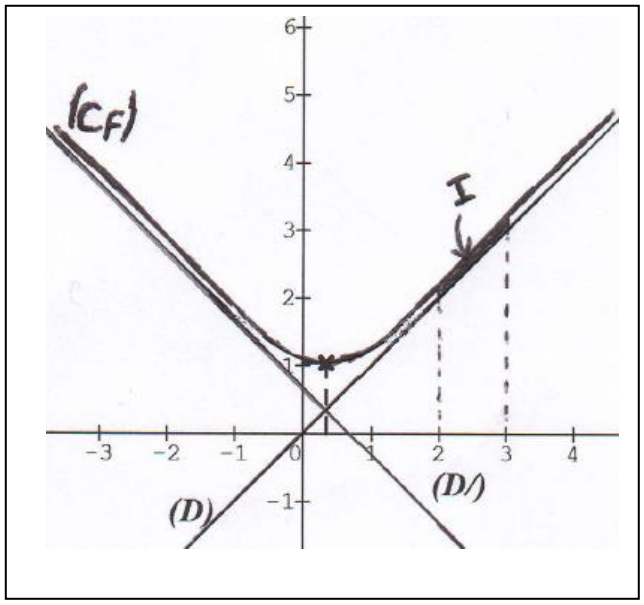
x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗ $+\infty$

$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln(1+2e^{-\ln 2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln 2$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{3\ln 2}{2}$

4) رسم : (C_f) ، (D) ، (D') 0.75



5) نضع $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx$:

1) المساحة المحددة بالمنحني (C_f) والمستقيمات 0.25

$x=2$ و $x=3$ و $(D): y=x$

2) إثبات أنه من أجل $x\in[0;+\infty[$: $\ln(1+x)\leq x$:

نضع : $g(x)=\ln(1+x)-x$

$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$

لدينا من أجل $x\geq 0$: $g'(x)\leq 0$

g متناقصة على المجال $[0;+\infty[$ (فهي تعكس الترتيب)

من أجل $x\geq 0$: $g(x)\leq g(0)$ ولدينا $g(0)=0$

$\ln(1+x)-x\leq 0$

$\ln(1+x)\leq x$ 0.5

3) إستنتاج أن $0\leq I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$:

لدينا: $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx=\int_2^3 (x+\ln(1+2e^{-2x})-x)dx$

$I=\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx$

$1+2e^{-2x}\succ 1$ ومنه $\ln(1+2e^{-2x})\succ 0$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\geq 0$ إذن $(1).....I\geq 0$

لدينا $2e^{-2x}\succ 0$ حسب السؤال السابق $\ln(1+2e^{-2x})\leq 2e^{-2x}$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

إذن $(2)....I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

من (1) و (2) نجد $0\leq I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$ 0.75

إيجاد حصرا للعدد I سعته 0,02 : $0\leq I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

لدينا: $\int_2^3 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_2^3=-e^{-6}+e^{-4}\approx 0.01583...$

ومنه: $0\leq I\leq (e^{-4}-e^{-6})$ 0.25

$0\leq I\leq 0,02$

بالتوفيق والنجاح في البكالوريا 2016