الموضوع الأول

التمرين الأول : $Z^2 - 2Z + 5 = 0$

1) $\Delta = -16$ حلا المعادلة هما: 1

$Z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$ و $Z_2 = 1 - 2i$

أ/ $Z_I = 1 - 2i$ ، $Z_B = -3$ ، $Z_A = 2 + \overline{Z_I}$

$Z_A = 3 + 2i$

$$Z = \frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B} = \frac{1 - 2i - 3 - 2i}{1 - 2i + 3} = \frac{-2 - 4i}{4 - 2i}$$

$$Z = \frac{-1 - 2i}{2 - i} = \frac{(-1 - 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2 - i - 4i + 2}{4 + 1}$$

0.5 $Z = \dfrac{-5i}{5}$ ومنه : $\boxed{Z = -i}$

0.5 $\boxed{Z = e^{-\frac{\pi}{2}i}}$

ب) $\left|\dfrac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}\right| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}\right) = \dfrac{-\pi}{2}$

0.5 $AI = BI$ و $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}) = \dfrac{-\pi}{2}$

AIB قائم في I ومتساوي الساقين

ج) لدينا $h(A;2)$ تحاكي و $h(I) = C$

الكتابة المركبة لتحاكي: $Z' - Z_A = 2(Z - Z_A)$

$h(I) = C$ ومنه : $Z_C - Z_A = 2(Z_I - Z_A)$

$Z_C = 2Z_I - Z_A$

$Z_C = 2 - 4i - 3 - 2i = -1 - 6i$

0.5 $\boxed{Z_C = -1 - 6i}$

3) G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ 0.5

أ) $Z_G = \dfrac{Z_A - Z_B + Z_C}{1 - 1 + 1} = 3 + 2i + 3 - 1 - 6i = 5 - 4i$

ب) $2\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\|$

لتكن H منتصف $[AB]$

$2\left\|(1 - 1 + 1)\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|(1 + 1)\overrightarrow{MH}\right\|$

0.75 $2MG = 2MH$ ومنه : $\boxed{MG = MH}$

مجموعة النقط (Γ_1) محور القطعة $[GH]$

ج) $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$

0.75 $\left\|(1 - 1 + 1)\overrightarrow{MG}\right\| = 4\sqrt{5}$ ومنه $\boxed{MG = 4\sqrt{5}}$

مجموعة النقط (Γ_2) دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = 4\sqrt{5}$

التمرين الثاني : $U_1 = \sqrt{e}$, $U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + \dfrac{1}{3}n + 1$

1) حساب u_2, u_3, u_4 : 0.75

$$U_2 = \frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{e} + \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{e} + 4}{3} \approx 2{,}43$$

$$U_3 = \frac{2}{3}U_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{e} + 4}{3}\right) + \frac{5}{3} = \frac{4\sqrt{e} + 23}{9} \approx 3{,}28$$

$$U_4 = \frac{2}{3}U_3 + \frac{3}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4\sqrt{e} + 23}{9}\right) + 2 = \frac{8\sqrt{e} + 100}{9} \approx 12{,}58$$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n + 3$

* من اجل $n = 1$: $U_1 = \sqrt{e} \approx 1{,}6$ ومنه $U_1 \leq 1 + 3$ (محققة)

*نفرض أن $U_n \leq n + 3$ صحيحة و نبين أن: $U_{n+1} \leq n + 4$

لدينا : $U_n \leq n + 3$ ومنه: $\dfrac{2}{3}U_n \leq \dfrac{2}{3}(n + 3)$ 1

إذن: $\dfrac{2}{3}U_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \leq \dfrac{2}{3}(n + 3) + \dfrac{1}{3}n + 1$

وبالتالي: $U_{n+1} \leq n + 3$ ومنه $U_{n+1} \leq n + 3 \leq n + 4$

ومنه : $U_{n+1} \leq n + 4$ إذن $p(n+1)$ صحيحة

*الإستنتاج : من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n + 3$

ب) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2}{3}U_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{1}{3}U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$$

0.25 لدينا : $U_n \leq n + 3$ ومنه: $n + 3 - U_n \geq 0$

أي: $\dfrac{1}{3}(n + 3 - U_n) \geq 0$ ومنه: $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ومنه: (U_n) متزايدة

3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n = U_n - n$

لدينا : $V_{n+1} = U_{n+1} - (n + 1)$

1 $V_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \dfrac{2}{3}U_n - \dfrac{2}{3}n$

أي : $V_{n+1} = \dfrac{2}{3}(U_n - n)$ $\boxed{V_{n+1} = \dfrac{2}{3}V_n}$

(V_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{3}$ و حدها الأول $V_1 = U_1 - 1 = \sqrt{e} - 1$

ب) عبارة V_n : $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ 0.25

$$\boxed{V_n = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

ب) عبارة U_n : $V_n = U_n - n$ 0.25

ومنه $U_n = V_n + n$ إذن : $\boxed{U_n = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n}$

تابع التمرين الثاني:

4) **حساب:** $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_2+..........+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_n$

لدينا : $V_n=V_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_1\left(\frac{2}{3}\right)^1+..........+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n=V_1\left(\frac{2}{3}\right)\left[\underbrace{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+..........+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}}\right]$$

$$S_n=V_1\left(\frac{2}{3}\right)\left[\underbrace{1+\left(\frac{4}{9}\right)+..........+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}\right]$$

0.5

$S_n=\frac{2}{3}V_1\left[1\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$ أي $\boxed{S_n=\frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}$

حساب: $S'_n=U_1+U_2+..........+U_n$

لدينا: $U_n=V_n+n$ ومنه:

$$S'_n=(V_1+1)+(V_2+2)+..........+(V_n+n)$$

$$S'_n=(V_1+V_2+....+V_n)+(1+2+...+n)$$

$$S'_n=V_1\times\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{n}{2}(1+n)$$

$$S'_n=(\sqrt{e}-1)\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n}{2}(1+n)$$

0.5

$$\boxed{S'_n=3(\sqrt{e}-1)\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}}$$

0.25

$$T_n=\frac{S'_n}{n^2}=\frac{3}{n^2}(\sqrt{e}-1)\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}$$

0.25 $\boxed{\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}}$

التمرين الثالث : $A(3,2,1)$ $B(3,5,4)$ $C(0,5,1)$

1) **إثبات أن** ABC **متقايس الأضلاع:**

$\vec{AB}(0,3,3)$ ، $\vec{AC}(-3,3,0)$ ، $\vec{BC}(-3,0,-3)$

0.5

$$AB=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(-3)^2+3^2+0^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$\boxed{AB=AC=BC}$ **إذن** ABC **متقايس الأضلاع**

2) **التحقق أن** $\vec{n}(1;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC) **:**

0.25

$\begin{cases}\vec{n}.\vec{AB}=0+3-3=0\\ \vec{n}.\vec{AC}=-3+3+0=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{AB}\\ \vec{n}\perp\vec{AC}\end{cases}$ **أي:** $\vec{n}\perp(ABC)$

ومنه $\vec{n}(1;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC)

معادلة (ABC) **:** $x+y-z+d=0$

0.5

$A(3,2,1)\in(ABC)$ **أي:** $3+2-1+d=0$ **أي:** $d=-4$ **ومنه :**

$\boxed{(ABC):x+y-z-4=0}$

3) أ) **تعيين إحداثيات** G **مركز ثقل المثلث** ABC **:**

0.25 $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

أي: $G\left(\frac{3+3+0}{3},\frac{2+5+5}{3},\frac{1+4+1}{3}\right)$ **ومنه:** $\boxed{G(2,4,2)}$

ب) **التمثيل الوسيطي للمستقيم** (Δ)

لدينا $G(2,4,2)\in(\Delta)$ و $(\Delta)\perp(ABC)$

0.5

يمكن اعتبار $\vec{n}(1;1;-1)$ **شعاع توجيه للمستقيم** (Δ)

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\ y=4+t\\ z=2-t\end{cases}}$$

0.25

ج) **التحقق أن** $F(4,6,0)$ **تنتمي إلى** (Δ) **:**

$(\Delta):\begin{cases}4=2+t\\ 6=4+t\\ 0=2-t\end{cases}$ **ومنه:** $(\Delta):\begin{cases}t=2\\ t=2\\ t=2\end{cases}$ t **قيمة وحيدة ومنه** $F\in(\Delta)$

حساب حجم $FABC$ **:**

لدينا (Δ) **يشمل** F **و عمودي على** (ABC) **ويمر من** G **مركز ثقل** ABC **ومنه** G **المسقط العمودي لـ** F **على** (ABC)

إذن FG ارتفاع الهرم $FABC$ الذي قاعدته ABC

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\mathrm{A}\times FG}$$

حساب A **مساحة** ABC **:** ليكن h ارتفاع المثلث ABC

$\left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2+h^2=(\sqrt{18})^2$ **ومنه :** $h=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$FG=\sqrt{(2-4)^2+(4-6)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{3}$$

0.75 $\boxed{V=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=9}$

4) **إثبات أن** $(FA)\perp(BC)$

0.25

$\vec{FA}(-1,-4,1)$ و $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$\vec{FA}.\vec{BC}=3+0-3=0$ **ومنه** $\vec{FA}\perp\vec{BC}$ **إذن** $(FA)\perp(BC)$

5) أ) تعيين (S) مجموعة النقط M : $\left\|\vec{MG}+\vec{MF}\right\| = 6$

لتكن I منتصف $[FG]$ ومنه $\left\|(1+1)\vec{MI}\right\| = 6$ أي $MI = 3$

0.5

$\boxed{(S) \text{ سطح كرة مركزها } I \text{ و نصف قطرها } r = 3}$

ب) الوضع النسبي بين (S) و (ABC) :

نحسب إحداثيات I : $I(\frac{4+2}{2},\frac{6+4}{2},\frac{0+2}{2})$ ومنه $\boxed{I(3,5,1)}$

نحسب المسافة بين I و (ABC)

لدينا: $d(I,(ABC)) = \frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

0.25

$d(I,(ABC)) \prec r$ إذن : (ABC) يقطع (S) وفق دائرة

التمرين الرابع:

I) $g(x) = \frac{-x+1}{-x+3} + \ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

0.5

1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} g(x) = -\infty$

2) اتجاه التغير: $g'(x) = \frac{-2}{(-x+3)^2} - \frac{1}{(-x+3)}$

$\boxed{g'(x) = \frac{x-5}{(-x+3)^2}}$

0.5

x	$-\infty$	3
$x-5$	—	

جدول تغيرات g

x	$-\infty$	3
$g'(x)$	—	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3) لدينا f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال [1,5 ; 1,7] وأيضا $f(1,5) \times f(1,7) < 0$

0.5

لأن: $f(1,7) \approx -0,27$ و $f(1,5) \approx 0,07$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $1,5 < \alpha < 1,7$

3) إشارة g :

x	$-\infty$		α		3
g		+	0	-	

0.25

II) $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$

0.5

2) اتجاه التغير: $f'(x) = 1\times\ln(-x+3) + (x-1)\times\frac{-1}{-x+3}$

0.5

$\boxed{f'(x) = g(x)}$

إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		3
$f'(x)$		+	0	—	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

0.5

إثبات أن $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$: لدينا $f(\alpha) = (\alpha-1)\ln(-\alpha+3)$

ولدينا: $g(\alpha) = 0$ ومنه: $\frac{-\alpha+1}{-\alpha+3} + \ln(-\alpha+3) = 0$

0.5

ومنه: $\ln(-\alpha+3) = \frac{\alpha-1}{-\alpha+3}$ إذن : $f(\alpha) = (\alpha-1)\times\frac{(\alpha-1)}{-\alpha+3}$

0.5

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$$

حصر : $f(\alpha)$

$1,5 \prec \alpha \prec 1,7$ إذن $0,5 \prec \alpha-1 \prec 0,7$ ومنه $\boxed{0,25 \prec (\alpha-1)^2 \prec 0,49}$

$-1,7 \prec -\alpha \prec -1,5$ إذن $1,3 \prec 3-\alpha \prec 1,5$ ومنه $\boxed{\frac{1}{1,5} \prec \frac{1}{3-\alpha} \prec \frac{1}{1,3}}$

ومنه : $\frac{0,25}{1,5} \prec \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha} \prec \frac{0,49}{1,3}$ ومنه $\boxed{0.2 \prec f(\alpha) \prec 0.4}$

0.25

حل المعادلة $f(x) = 0$ لدينا: $(x-1)\ln(-x+3) = 0$

($x-1=0$ أو $\ln(-x+3)=0$) ومنه ($x=1$ أو $-x+3=e^0$)

$\boxed{x=1 \text{ أو } x=2}$

إشارة : f

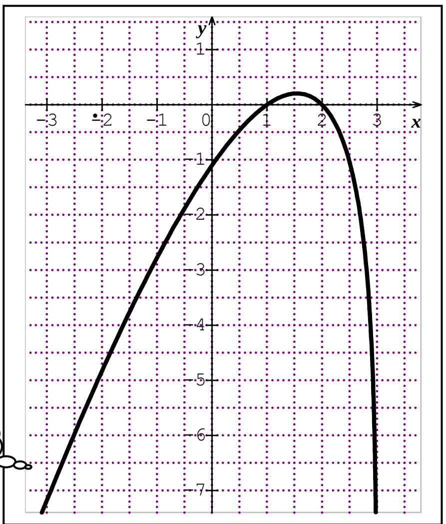
x	$-\infty$		1		2		3
$x-1$		-	0	+		+	
$\ln(-x+3)$		+		+	0	-	
f		-	0	+	0	-	

4)

0.25

$f(-2) = -3\ln5 \approx -4,9$ و $f(-3) = -4\ln6 \approx -7,2$

رسم : (C_f)



0.75

5) إثبات أن F دالة أصلية للدالة f

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})\ln(-x+3)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})\times\frac{-1}{-x+3}$$

0.5

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x^2-2x-3)}{x-3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = (x-1)\ln(-x+3) = f(x)$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

$A(3,4,0)$ $B(0,5,0)$ $C(0,0,5)$ $D(-2,-6,5)$

$E(-4;0;-3)$

1) التحقق أن النقط C,B,A **تعين مستو:**

$\vec{AB}(-3,1,0)$ و $\vec{AC}(-3,-4,5)$

لدينا $(\frac{-3}{-3}\neq\frac{-4}{1})$ **ومنه** $\vec{AB}$ **و** $\vec{AC}$ **غير مرتبطان خطيا**

0.5

C,B,A **ليست على استقامية فهي تشكل المستوي** (ABC)

2) التحقق أن $\vec{n}(1;3;3)$ **ناظمي للمستوي** (ABC)**:**

0.25

$$\begin{cases}\vec{n}.\vec{AB}=-3+3+0=0\\ \vec{n}.\vec{AC}=-3-12+15=0\end{cases}$$ **ومنه** $$\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{AB}\\ \vec{n}\perp\vec{AC}\end{cases}$$ **أي:** $\vec{n}\perp(ABC)$

ومنه $\vec{n}(1;3;3)$ **ناظمي للمستوي** (ABC)

معادلة (ABC) **:** $x+3y+3z+d=0$

$A(3,4,0)\in(ABC)$ **أي:** $3+12+d=0$ **أي:** $d=-15$ **ومنه :**

$\boxed{(ABC): x+3y+3z-15=0}$ 0.5

2) أ) إثبات أن AOB **متساوي الساقين:**

$OA=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=\sqrt{25}=5$

$OB=\sqrt{0^2+5^2+0^2}=\sqrt{25}=5$

0.5

$OA=OB$ **إذن** AOB **متساوي الساقين**

ب) حساب إحداثيات I منتصف $[AB]$

$I(\frac{3+0}{2},\frac{4+5}{2},\frac{0+0}{2})$ **ومنه** $\boxed{I(\frac{3}{2},\frac{9}{2},0)}$ 0.5

حساب OI **:**

0.25

$OI=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{9}{2})^2+0^2}=\sqrt{\frac{90}{4}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

حساب حجم $OABC$ **:**

لدينا : $\vec{OC}(0,0,5)$ $\vec{OA}(3,4,0)$ $\vec{OB}(0,5,0)$

$$\begin{cases}\vec{OC}.\vec{OA}=0\\ \vec{OC}.\vec{OB}=0\end{cases}$$ **ومنه** $$\begin{cases}\vec{OC}\perp\vec{OA}\\ \vec{OC}\perp\vec{OB}\end{cases}$$ **إذن** $\vec{OC}\perp(AOB)$

إذن OC ارتفاع الهرم $OABC$ الذي قاعدته AOB

$$V=\frac{1}{3}\mathrm{A}\times OC$$

لدينا $OC=5$

حساب A مساحة AOB **:** $\mathrm{A}=\frac{1}{2}\times OI\times AB$

$AB=\sqrt{10}$ ومنه: $\mathrm{A}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10}=\frac{15}{2}$

1

حجم رباعي الوجوه: $\boxed{V=\frac{1}{3}\times\frac{15}{2}\times5=\frac{25}{2}}$

3) حساب المسافة بين O **و** (ABC) **:**

0.25

لدينا : $d(O,(ABC))=\frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{19}}=\frac{15\sqrt{19}}{19}$

4) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

لدينا $\vec{DE}(-2,6,-8)$ **و** $E\in(DE)$

0.5

$$\boxed{(DE):\begin{cases}x=-4-2t\\ y=6t\\ z=-3-8t\end{cases}}$$

ب) معادلة (Q) **المستوي المحوري للقطعة** $[DE]$ **:**

ليكن H منتصف $[DE]$:

$H(\frac{-4-2}{2},\frac{0-6}{2},\frac{-3+5}{2})$ **ومنه** $\boxed{H(-3,-3,1)}$

(Q) **يشمل** H **وشعاعه الناظمي** $\vec{DE}(-2,6,-8)$ **:**

معادلته : $-2x+6y-8z+d=0$

$H\in(Q)$ **أي:** $6-18-8+d=0$ **أي:** $d=20$ **ومنه :**

$(Q): -2x+6y-8z+20=0$

1

$\boxed{(Q): x-3y+4z-10=0}$

ج) التحقق أن $F(-1;1;\frac{7}{2})\in Q$ **:**

0.25

$-1-3+\frac{28}{2}-10=0$ **إذن** $0=0$ **ومنه** $F\in Q$

3) استنتاج المسافة بين F **و المستقيم** (DE) **:**

$\boxed{d(F,(DE))=FH}$

$FH=\sqrt{(-3+1)^2+(-3-1)^2+(1-\frac{7}{2})^2}$

0.5

$\boxed{FH=\sqrt{4+16+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{105}{4}}=\frac{\sqrt{105}}{2}}$

التمرين الثاني : $Z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}Z+1-i$

1) S **تشابه مباشر نسبته** 2 **و زاويته** $\frac{-\pi}{3}$ **ومركزه** W

لدينا: $2e^{\frac{-\pi}{3}i} = 2(\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3}))$

0.75

$$2e^{\frac{-\pi}{3}i} = 2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1-i\sqrt{3}$$

$$Z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}(i\sqrt{3})}$$

$$Z_W = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(-i\sqrt{3})}{i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$W(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3})$$

تعيين لواحق A', B', C' **بالتشابه** S :

$$Z' = (1-i\sqrt{3})Z+1-i$$

$S(A)=A'$ اي $Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})Z_A+1-i$

$Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})i+1-i$ ومنه $\boxed{Z_{A'} = 1+\sqrt{3}}$

0.25

$S(B)=B'$ اي $Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})Z_B+1-i$

$$Z_B = \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4}))$$

$$Z_B = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1-i$$

$$Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})(1-i)+1-i$$

$$Z_{B'} = 1-i-i\sqrt{3}-\sqrt{3}+1-i$$

0.25 $\boxed{Z_{B'} = (2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})i}$

$S(C)=C'$ اي $Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})Z_C+1-i$

$Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})(-1)+1-i$ ومنه $\boxed{Z_{C'} = (\sqrt{3}-1)i}$

3)أ) G **مرجح الجملة :** $\{(A;3),(B;1),(C;-2)\}$

0.25

$$Z_G = \frac{3Z_A+Z_B-2Z_C}{3+1-2} = \frac{3i+1-i-2(-1)}{2}$$

0.5 $\boxed{Z_G = \frac{3}{2}+i}$

ب) G' **مرجح الجملة :** $\{(A';3),(B';1),(C';-2)\}$

$$Z_{G'} = \frac{3Z_{A'}+Z_{B'}-2Z_{C'}}{3+1-2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3(1+\sqrt{3})+2-\sqrt{3}+(-2-\sqrt{3})i-2(\sqrt{3}-1)i}{2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3+3\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-2i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+2i}{2}$$

$\boxed{Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ **0.5**

ج) $S(G)=G'$ ومنه $Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})Z_G+1-i$

$$Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})(\frac{3}{2}+i)+1-i$$

$$Z_{G'} = \frac{3}{2}+i-\frac{3\sqrt{3}}{2}i+\sqrt{3}+1-i$$

0.5 $\boxed{Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

الاستنتاج : التشابه المباشر يحافظ عل المرجح

4) أ)إثبات أن $\vec{GM'} = \vec{MG}$

حسب علاقة شال $\vec{MM'} = 3\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{MC}$

$$\vec{MG}+\vec{GM'} = 3(\vec{MG}+\vec{GA})+\vec{MG}+\vec{GB}-2(\vec{MG}+\vec{GC})$$

$$\vec{GM'} = (3+1-2-1)\vec{MG}+\underbrace{3\vec{GA}+\vec{GB}-2\vec{GC}}_{\vec{0}}$$

0.5

ومنه : $\vec{GM'} = \vec{MG}$ إذن $\vec{GM'} = -\vec{GM}$

0.25 **التحويل تحاكي مركزه** G **ونسبته 1- (تناظر مركزه** G **)**

ب) تعيين لواحق F, E, D **صور** C, B, A **بالتحاكي** $T(G;-1)$:

الكتابة المركبة لتحاكي: $Z'-Z_G = -(Z-Z_G)$

$T(A)=D$ **ومنه :** $Z_D-Z_G = -(Z_A-Z_G)$

$$Z_D = -Z_A+2Z_G$$

0.25 $\boxed{Z_D = 3+i}$ **ومنه:** $Z_D = -i+2(\frac{3}{2}+i) = 3+i$

$T(B)=E$ **ومنه :** $Z_E-Z_G = -(Z_B-Z_G)$

$$Z_E = -Z_B+2Z_G$$

0.25 $\boxed{Z_E = 2+3i}$ **ومنه** $Z_E = -(1-i)+2(\frac{3}{2}+i)$

$T(C)=F$ **ومنه :** $Z_F-Z_G = -(Z_C-Z_G)$

$$Z_F = -Z_C+2Z_G$$

0.25 $\boxed{Z_E = 4+2i}$ **ومنه** $Z_F = -(-1)+2(\frac{3}{2}+i)$

أ)إثبات أن المثلثين ABC **و** EDF **متقايسان :**

لدينا : $T(A)=D$ و $T(B)=E$ و $T(C)=F$

المثلث EDF صورة المثلث ABC بالتحاكي T الذي يضرب الأطوال في $|K|$ حيث ($k=-1$ نسبة التحاكي) ومنه :

$$ED = |-1|BA = BA$$

0.5

$$EF = |-1|BC = BC$$

$$DF = |-1|AC = AC$$

ومنه ABC و EDF متقايسان

التمرين الثالث: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$ ، $D_g=\Re$

1) **النهايات:**

0.5

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=-\infty$$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=\lim(xe^{-x}-e^{-x}+2)=2$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$

0.5

حساب المشتق:

$g'(x)=e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})$ ومنه $\boxed{g'(x)=(2-x)e^{-x}}$

اشارة المشتق:

0.5

$g'(x)=0$ أي $2-x=0$ ومنه $x=2$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$ لأن $e^{-x}\succ 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

2)جدول تغيرات g :

0.5

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

2) تعليل وجود عدد $-0.38\prec\alpha\prec-0.36$ يحقق: $g(\alpha)=0$:

لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0.38;-0.36]$

0.75

وأيضا $g(-0,36)\times g(-0,38)\prec 0$

لأن: $g(-0,38)\approx-0,02$ و $g(-0,36)\approx 0,05$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $-0.38\prec\alpha\prec-0.36$

استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	3
g	$-$	0	$+$

0.25

II) $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، $D_f=\Re$

(1

0.5

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})=+\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x}=0$

2)أ)تبيان أن $f'(x)=g(x)$

0.25

$$f'(x)=2-e^{-x}-x(-e^{-x})$$

$$f'(x)=(x-1))e^{-x}+2=g(x)$$

استنتاج إشارة $f'(x)$:

0.25

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	3
f'	$-$	0	$+$

0.5

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) **إثبات أن** $f(\alpha)=2\alpha+3+\dfrac{2}{\alpha-1}$:

لدينا : $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$

و $g(\alpha)=0$ ومنه $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$ إذن $e^{-\alpha}=\dfrac{-2}{\alpha-1}$

ومنه $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$

0.5

لكن : $\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+3+\dfrac{2}{\alpha-1}$

حصر $f(\alpha)$: $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$

$$2(-0,38)+3\prec 2\alpha+3\prec 2(-0,36)+3$$

0.25

$$\boxed{2,24\prec 2\alpha+3\prec 2,28}$$

ولدينا : $-1,38\prec\alpha-1\prec-1,36$

ومنه $\boxed{\dfrac{2}{-1,36}\prec\dfrac{2}{\alpha-1}\prec\dfrac{2}{-1,38}}$

$$2,24-\frac{2}{1,36}\prec 2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}\prec 2,28-\frac{2}{1,38}$$

$$\boxed{0,77\prec f(\alpha)\prec 0,83}$$

3) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا : $f'(x)=g(x)$

0.5

ومنه : $\boxed{f''(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}}$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $2-x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$f''(x)$ تنعدم عند 2 مغيرة إشارتها ومنه النقطة

$B(2;f(2))$ أي $B(2;5-2e^{-2})$ نقطة انعطاف

4) أ) إثبات أن $(\Delta): y = 2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)] = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ 0.25

دراسة الوضع النسبي (C_f) و (Δ):

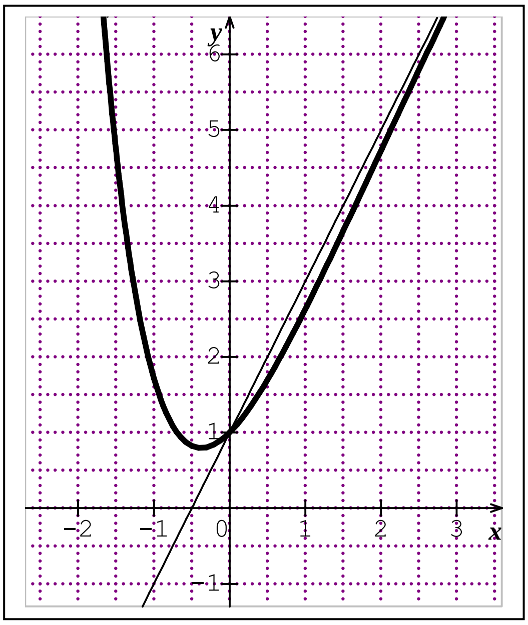
$$\boxed{f(x)-(2x+1) = -xe^{-x}}$$

إشارة الفرق من إشارة $-x$ 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة الفرق	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

$$\boxed{(C_f)\cap(\Delta) = \{(0;1)\}}$$

رسم (C_f):



0.5

5) حساب مشتق h: $h(x) = f(x^2e^x)$

$$h'(x) = (x^2e^x)' \times f'(x^2e^x)$$

لدينا: $(x^2e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = (2x+x^2)e^x$

ومنه: $h'(x) = (2x+x^2)e^x \times f'(x^2e^x)$

لدينا: $f'(x) = g(x)$ ومنه: $f'(x^2e^x) = g(x^2e^x)$

ومنه: $\boxed{h'(x) = (2x+x^2)e^x \times g(x^2e^x)}$ 0.5

إشارة $h'(x)$:

من إشارة $2x+x^2$ لأن $e^x \succ 0$ و $g(x^2e^x) \succ 0$

(لاحظ جدول إشارة g على المجال $[0;+\infty[$)

$2x+x^2 = 0$ أي $x(x+2) = 0$ ومنه: $x = 0$ أو $x = -2$

0.25

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات h: 0.5

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$h(-2)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6) لدينا $k(x) = (ax+b)e^{-x}$

أ) تعيين العددين a و b:

بما أن k دالة أصلية للدالة $x \to -xe^{-x}$ فإن:

$$k'(x) = -xe^{-x}$$

$$k'(x) = ae^{-x} + (ax+b)(-e^{-x})$$

$$k'(x) = (-ax+a-b)e^{-x}$$

ومنه: $(-ax+a-b)e^{-x} = -xe^{-x}$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} -a = -1 \\ a-b = 0 \end{cases}$ ومنه $\boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = a = 1 \end{cases}}$ 0.5

إذن: $\boxed{k(x) = (x+1)e^{-x}}$

ب) إستنتاج دالة أصلية للدالة f:

$$f(x) = 2x+1-xe^{-x}$$

ومنه دالة أصلية للدالة f على $\Re$ هي: 0.5

$$\boxed{F(x) = x^2+x+(x+1)e^{-x}}$$

بالتوفيق والنجاح في البكالوريا 2015