الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.
2) عين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5.
3) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.
4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:
$$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 0\ [5]$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:
$$u_2=4$$
حيث:
$$u_5\times u_7=4096$$
1) أحسب u_6 ثم الأساس q.
2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
3) أحسب المجموع S_n بدلالة n، حيث:
$$S_n=u_2+u_3+\cdots+u_n$$
4) علما أن: $2^8=256$.
- عين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n=1020$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x)=2x^3-3x^2+1$$
ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.
4) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f(x)=(x-1)(2x^2-x-1)$$
5) استنتج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل.
6) أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=\frac{1}{2}$.
7) أنشئ (C) و (Δ) في المعلم السابق.

تصحيح الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

1) ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5:

من أجل $n=0$: $2^0\equiv 1\ [5]$

من أجل $n=1$: $2^1\equiv 2\ [5]$

من أجل $n=2$: $2^2\equiv 4\ [5]$

من أجل $n=3$: $2^3\equiv 3\ [5]$

من أجل $n=4$: $2^4\equiv 1\ [5]$

نلخص بواقي قسمة 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	[5]

ونكتب:
$$\begin{cases}2^{4k}\equiv 1\ [5]\\2^{4k+1}\equiv 2\ [5]\\2^{4k+2}\equiv 4\ [5]\\2^{4k+3}\equiv 3\ [5]\end{cases}$$
ومنه:
- بواقي قسمة 2^{4k} على 5 هي 1.
- بواقي قسمة 2^{4k+1} على 5 هي 2.
- بواقي قسمة 2^{4k+2} على 5 هي 4.
- بواقي قسمة 2^{4k+3} على 5 هي 3.

2) نعين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5:

لدينا: $1432\equiv 2\ [5]$

حسب خواص الموافقات: $1432^{2013}\equiv 2^{2013}\ [5]$

ونكتب: $1432^{2013}\equiv 2^{4\times 503+1}\ [5]$

ولدينا: $2^{4k+1}\equiv 2\ [5]$

حسب خاصية التعدي ينتج:
$$1432^{2013}\equiv 2\ [5]$$
ومنه باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5 هو 2.

3) نثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.

$2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5 يعني أن $2^{4n}-1$ يقبل القسمة على 5.

أي:
$$2^{4n}-1\equiv 0\ [5]$$
نسمي الخاصية $P(n)$ التالية: $P(n):\ 2^{4n}-1\equiv 0\ [5]$

من أجل $n=0$ نجد: $0\equiv 0\ [5]$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:
$$2^{4n}-1\equiv 0\ [5]$$
ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$.

أي:
$$2^{4(n+1)}-1\equiv 0\ [5]$$

لدينا من الفرضية: $2^{4n}-1 \equiv 0\ [5] \dots (1)$

ولدينا: $2^4 \equiv 1\ [5] \dots (2)$

نضرب (1) في (2) ينتج: $(2^{4n}-1)2^4 \equiv 0 \times 1\ [5]$

بالنشر ينتج: $2^{4n} \times 2^4 - 2^4 \equiv 0\ [5]$

ونكتب: $2^{4n+4} - 2^4 \equiv 0\ [5]$

أي: $2^{4(n+1)} - 2^4 \equiv 0\ [5]$

وبما أن: $2^4 \equiv 1\ [5]$

فإن:

$$2^{4(n+1)} - 1 \equiv 0\ [5]$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

إذن العدد $2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.

4) **نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:**

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 0\ [5]$$

لدينا:

$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 2^{4\times103} + 2^{2(4n+1)} - 5\ [5]$
$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 2^{4\times103} + (2^{4n+1})^2 - 5\ [5]$
$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 1 + (2)^2 - 5\ [5]$
$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 1 + 4 - 5\ [5]$
$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 5 - 5\ [5]$

ومنه نجد:

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 0\ [5]$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:

$$u_2 = 4$$

حيث:

$$u_5 \times u_7 = 4096 \dots (1)$$

1) **نحسب u_6 ثم الأساس q:**

نكتب كلا من u_7 و u_5 بدلالة u_6.

لدينا:

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_6 = u_5 \times q \end{cases}$$

ونكتب:

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_5 = \dfrac{u_6}{q} \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج: $u_6^2 = 4096$

نجد: $u_6 = -64$ أو $u_6 = 64$

بما أن حدود المتتالية (u_n) موجبة فإن:

$$u_6 = 64$$

لدينا: $u_6 = u_2 \times q^4$

ومنه: $q^4 = \frac{u_6}{u_2}$

بعد التعويض نجد: $q^4 = 16$

ونكتب: $q^4 = (-2)^4$ أو $q^4 = 2^4$

نجد: $q = -2$ أو $q = 2$

وبما أن (u_n) متتالية هندسية متزايدة فإن:

$$q = 2$$

2) **نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:**

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_2 بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_2 \times q^{n-2}$$

بعد التعويض نجد: $u_n = 4 \times 2^{n-2}$

ونكتب: $u_n = 2^2 \times 2^{n-2}$

ومنه نجد:

$$u_n = 2^n$$

3) **نحسب المجموع S_n بدلالة n:**

$$S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

تعطى عبارة مجموع حدود متتالية هندسية بالعلاقة التالية:

$$S_n = \text{الحد الأول في المجموع} \times \frac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}$$

ويعطى عدد الحدود بالعلاقة التالية:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

- **الحد الأول في المجموع هو u_2.**
- **الأساس هو q.**
- **عدد الحدود هو $n-1$.**

ومنه: $S_n = u_2 \times \frac{q^{n-1}-1}{q-1}$

بالتعويض: $S_n = 4 \times \frac{2^{n-1}-1}{2-1}$

ومنه نجد:

$$S_n = 4(2^{n-1}-1)$$

4) **علما أن:** $2^8 = 256$.

- **نعين العدد الطبيعي n بحيث:** $S_n = 1020$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 1020$

أي: $4(2^{n-1}-1) = 1020$

بالاختزال: $2^{n-1} - 1 = 255$

أي: $2^{n-1} = 256$

حيث: $2^8 = 256$

ومنه: $2^{n-1} = 2^8$

بالمطابقة نجد: $n - 1 = 8$

ومنه:

$$n = 9$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) نعين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

● نحسب نهاية f الدالة عند $-\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3-3x^2+1)$

نأخذ نهاية أكبر أس: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

● نحسب نهاية f الدالة عند $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3-3x^2+1)$

نأخذ نهاية أكبر أس: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) ندرس تغيرات الدالة f ثم نشكل جدول تغيراتها:

● ندرس تغيرات الدالة f:

- نحسب الدالة المشتقة f' للدالة f:

لدينا: $f'(x) = 6x^2 - 6x$

ومنه نجد:

$$f'(x) = 6x(x-1)$$

- ندرس إشارة $f'(x)$:

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f'(x) = 0$

أي: $6x(x-1) = 0$

ومنه: $6x = 0$ أو $x - 1 = 0$

فنجد:

$$x = 0 \text{ أو } x = 1$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(6x)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

حيث:

- الدالة f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$
- الدالة f متناقصة تماما على المجال: $]0 ; 1[$

● نشكل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

حيث:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

3) نبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها:

نحسب الدالة المشتقة الثانية $f''(x)$ حيث: $f''(x) = 12x - 6$

ومنه نكتب:

$$f''(x) = 6(2x-1)$$

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f''(x) = 0$

أي: $2x - 1 = 0$

ومنه نجد:

$$x = \frac{1}{2}$$

نحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ فنجد:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف w هي:

$$w\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

4) نتحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-1)(2x^2-x-1)$$

ننشر العبارة $(x-1)(2x^2-x-1)$ فنجد:

$$(x-1)(2x^2-x-1) = 2x^3 - x^2 - x - 2x^2 + x + 1$$

بعد الاختزال والترتيب نجد:

$$(x-1)(2x^2-x-1) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = f(x)$$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-1)(2x^2-x-1)$$

5) استنتاج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل:

نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

أي: $(x-1)(2x^2-x-1) = 0$

ومنه:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x - 1 = 0$

أي: $x = 1$

ولدينا: $2x^2 - x - 1 = 0$

نحسب المميز Δ فنجد: $\Delta = 9$

ومنه حلول المعادلة هي:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

وبالتالي:

(C) يقطع محور الفواصل في النقطتين A و B حيث:

$$A(1 ; 0) \text{ و } B\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$$

6) نكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \frac{1}{2}$:

تعطى معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 بالعلاقة التالية:

$$(\Delta) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

حيث:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بعد التعويض نجد:

$$(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

7) ننشئ (C) و (Δ):

- لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

x	$1/2$	0
y	$1/2$	$5/4$

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $w\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ و $w'\left(0 ; \frac{5}{4}\right)$.

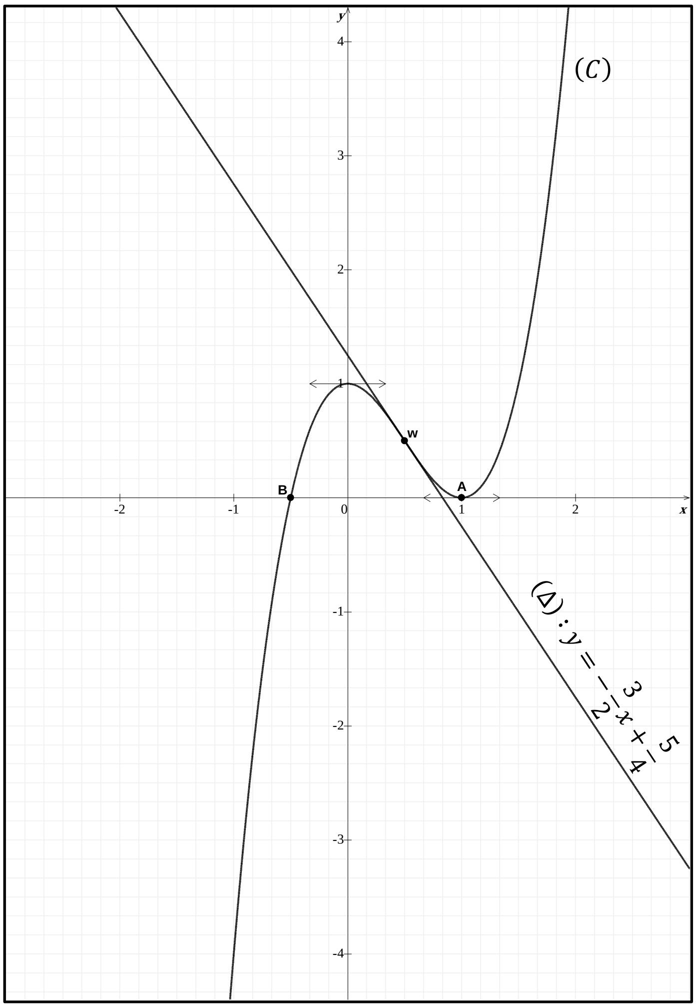
- لرسم المنحنى (C) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

$A(1 ; 0)$ و $B\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$

- نقطة انعطاف المنحنى (C).

$$w\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$



المنحنى الممثل للدالة f

حظ سعيد

05 56 24 69 06
bouguetof.hamid@yahoo.fr