التمرين الأول

1) خطأ : النسبة هي $k=-2$

التبرير: $\vec{AI}=\frac{1}{3}\vec{AD}=\frac{1}{3}\left(\vec{AI}+\vec{ID}\right)=\frac{1}{3}\vec{AI}+\frac{1}{3}\vec{ID}$

أي $\frac{2}{3}\vec{AI}=\frac{1}{3}\vec{ID}$ أي $-2\vec{IA}=\vec{ID}$ ومنه $\boxed{\vec{ID}=-2\vec{IA}}$

2) صح : صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته 3 هي النقطة A

أي $\vec{CA}=3\vec{CB}$.

3) خطأ : النقطة الصامدة هي $\Omega(1;2)$

التبرير: $\begin{cases} x'=-2x+3 \\ y'=-2y+6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=-2x+3 \\ y=-2y+6 \end{cases}$ أي $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}}$

التمرين الثاني

1) معادلة المستقيم (Δ)

$\vec{OA}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي إذن: $(\Delta):(2)x+(2)y+c=0$

المستقيم يشمل منتصف $[OA]$ أي $\boxed{\omega(1,1)}$ إذن نبحث عن قيمة c بما أن $\omega\in(\Delta)$ أي: $2(1)+2(1)+c=0\Rightarrow\boxed{c=-4}$

ومنه $\boxed{(\Delta): 2x+2y-4=0}$ أو $\boxed{(\Delta): x+y-2=0}$

2) معادلة الدائرة (C)

لدينا المركز $\omega(1,1)$ ونصف القطر $\frac{OA}{2}=r=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

إذن معادلة الدائرة هي: $\boxed{(C):(x-1)^2+(y-1)^2=2}$

3) تبيين أن (T) مماس لـ(C)

نحسب المسافة بين مركز الدائرة و المستقيم (T)

$$d(\omega,(T))=\frac{|-x_0+y_0+2|}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|-(1)+1(1)+2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

إذن $\boxed{d(\omega,(T))=\sqrt{2}=r}$ ومنه (T) مماس لـ (C)

✍ إيجاد إحداثيات النقطة E: أي إيجاد النقطة التقاطع أو التماس

بين (T) و (C) نحل جملة المعادلة: $\begin{cases} y=x-2 ....(1) \\ (x-1)^2+(y-1)^2=2 ......(2) \end{cases}$

بتعويض (1) في (2) نجد: $(x-1)^2+((x-2)-1)^2=2$ بعد التبسيط نجد: $\boxed{2x^2-8x+8=0}$ نبسط المعادلة نجد $(x-2)^2=0$

أو نحل المعادلة بحساب المميز $\boxed{\Delta=0}$ إذن المعادلة تقبل حل مضاعف $\boxed{x=2}$ بالتعويض في المعادلة رقم (1) نجد $\boxed{y=0}$ إذن إحداثيات النقطة $\boxed{E(2,0)}$

4) تبيين أن النقطة B تقع خارج الدائرة (C)

نحسب المسافة $\boxed{\omega B=\sqrt{5}>r=\sqrt{2}}$ إذن B تقع خارج الدائرة (C).

5) تبيين أن: $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=6$

لدينا $\vec{OA}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{OB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ إذن $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=3\times2+2\times0=6$

✍ استنتاج قيس للزاوية $A\hat{O}B$:

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\left\|\vec{OA}\right\|\cdot\left\|\vec{OB}\right\|\cdot\cos\left(\vec{OA},\vec{OB}\right)=6$$

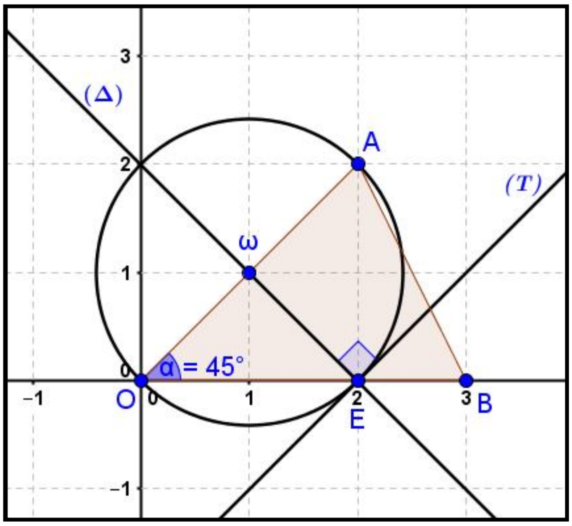
إذن: $\cos\left(\vec{OA},\vec{OB}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $\boxed{\left(\vec{OA},\vec{OB}\right)=\frac{\pi}{4}}$

6) حساب مساحة المثلث AOB:

لدينا: $\sin\hat{O}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA\times OB\times\sin\hat{O}$ أي $S_{AOB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $\boxed{S_{AOB}=3}$



7) تعيين مجموعة النقط M التي تحقق: $MO^2+MA^2=8$

لدينا $\omega(1,1)$ منتصف $[OA]$ إذن حسب مبرهنة المتوسط :

$MO^2+MA^2=2M\omega^2+\frac{1}{2}OA^2$ أي $2M\omega^2+\frac{1}{2}OA^2=8$

أي $2M\omega^2+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ ومنه $M\omega^2=2$ إذن $\boxed{M\omega=\sqrt{2}}$

و بالتالي فإن مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة ω و نصف قطرها $\sqrt{2}$ أي هي الدائرة (C).

التمرين الثالث

1/ أ- حساب u_1 و u_2.

$$u_1 = \frac{7u_0}{1+2u_0} = \frac{7\times 2}{1+2\times(2)} = \boxed{\frac{14}{5}}$$

$$u_2 = \frac{7u_1}{1+2u_1} = \frac{7\left(\frac{14}{5}\right)}{1+2\left(\frac{14}{5}\right)} = \boxed{\frac{98}{33}}$$

ب- تبيين أن: $u_{n+1}-u_n = \dfrac{2u_n(3-u_n)}{1+2u_n}$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{7u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{7u_n-(u_n)(1+2u_n)}{1+2u_n}$$

$$= \frac{7u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{6u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \boxed{\frac{2u_n(3-u_n)}{1+2u_n}}$$

✍ استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $0<u_n<3$: $\boxed{2u_n>0}$ و $\boxed{1+2u_n>0}$ لأن $u_n>0$ و $\boxed{(3-u_n)>0}$ لأن $u_n<3$ إذن $\boxed{u_{n+1}-u_n>0}$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2/ أ- تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3-u_{n+1}} = \frac{\frac{7u_n}{1+2u_n}}{3-\frac{7u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{7u_n}{1+2u_n}}{\frac{3(1+2u_n)-7u_n}{1+2u_n}}$$

$$= \frac{\frac{7u_n}{\cancel{1+2u_n}}}{\frac{3-u_n}{\cancel{1+2u_n}}} = 7\times\frac{u_n}{3-u_n} = \boxed{7v_n}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\boxed{q=7}$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0}{3-u_0} = \frac{2}{3-2} = \boxed{2}$$

ب- كتابة (v_n) بدلالة n

لدينا: $\boxed{v_n = v_0\times q^n}$ ومنه: $\boxed{v_n = 2\times 7^n}$

ج- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=+\infty$ لأن $q=7>1$ و $v_0=2>0$

✍ نستنتج أن المتتالية (v_n) متباعدة.

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0+v_1+........+v_{n+1}$

عدد الحدود= $[(n+1)-0+1] = n+2$

$$S_n = v_0\times\left(\frac{q^{n+2}-1}{q-1}\right) = 2\left(\frac{7^{n+2}-1}{7-1}\right) = \boxed{\frac{7^{n+2}-1}{3}}$$