عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (07 نقاط)		
$(I$		
1) تعيين إحداثيات كلا من النقط I ، J ، E و F في المعلم $\left(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)$	02	
$I(0;0;\frac{1}{2})$ ، $J(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ ، $E(1;0;-\frac{1}{2})$ ، $F(0;1;\frac{1}{2})$		
نتحقق بسهولة أن: $x_J=\frac{x_E+x_F}{2}$ ، $y_J=\frac{y_E+y_F}{2}$ و $z_J=\frac{z_E+z_F}{2}$	00.50	
إذن النقطة J هي منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$		
2) إثبات أن الأشعة $\overrightarrow{DA}$ ، $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{CE}$ من نفس المستوي.		
يكفي إيجاد عددين حقيقيين α و β حيث يكون: $\overrightarrow{DA}=\alpha\overrightarrow{DB}+\beta\overrightarrow{CE}$	00.50	
لدينا: $\overrightarrow{DA}(0;-1;1)$ ، $\overrightarrow{DB}(0;-1;0)$ و $\overrightarrow{CE}\left(0;0;-\frac{1}{2}\right)$	01.50	
بحل الجملة: $\begin{cases}0\alpha+0\beta=0\\-1\alpha+0\beta=-1\\0\alpha-0.5\beta=1\end{cases}$ نجد: $(\alpha;\beta)=(1;-2)$ و منه: $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{CE}$	00.50	
3) التحقق أن من صحة النتائج بالحساب الشعاعي:		
$\overrightarrow{BI}=0\overrightarrow{BC}+0\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+0\overrightarrow{BA}$	01	
$\overrightarrow{BE}=1\overrightarrow{BC}+0\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BF}=0\overrightarrow{BC}+1\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$		
$\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{JF}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-2\overrightarrow{BJ}=\vec{0}$	00.50	
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$		
و منه: $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{CE}$	00.50	
$(II$		
1) حساب إحداثيات كلا من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ و التحقق فيما إذا كانت الأشعة		
$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{w}(-6;-14;-8)$ من نفس المستوي ؟		
$\overrightarrow{AB}(-12;-8;8)$ ، $\overrightarrow{AC}(-6;-14;-8)$ ، $\overrightarrow{BC}(6;-6;-16)$ ، $\vec{w}(-6;-14;-8)$	01	

07

لنبحث عن عددين حقيقيين α و β بحيث يكون: $\vec{w}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ أي:

$\begin{cases}-12\alpha-6\beta=-6\\-8\alpha-14\beta=-14\\8\alpha-8\beta=-8\end{cases}$ و منه: $\begin{cases}2\alpha+\beta=1\\4\alpha+7\beta=7\\\alpha-\beta=-1\end{cases}$ و منه: $(\alpha;\beta)=(0;1)$ 01

و منه الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ من نفس المستوي.

2) التحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى سطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(1;-1;3)$ و نصف قطرها R يطلب حسابه:

$\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=10$ و منه: $R=10$ 02.00

3) استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) :

$(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=10^2$ 00.50

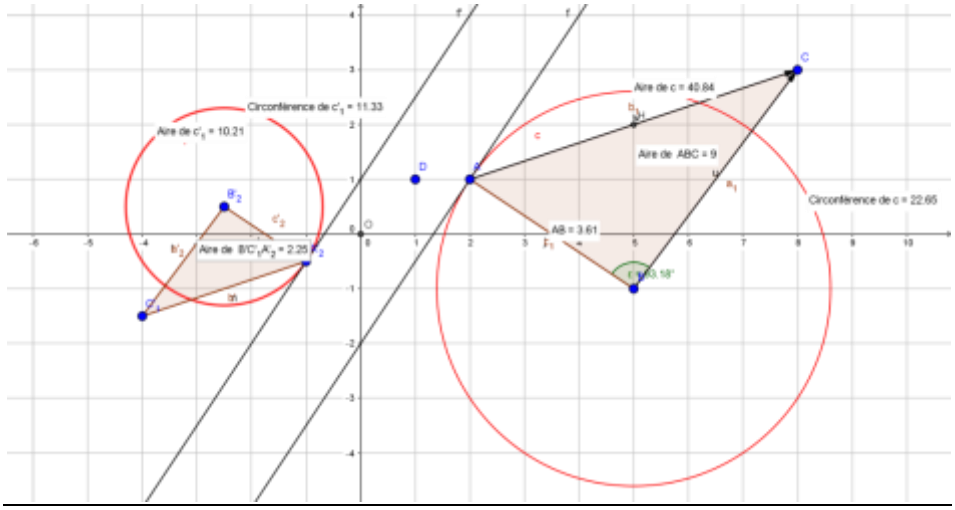
$x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-89=0$ 01.00

4) كتابة معادلات المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة E و $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ شعاع توجيه له، أو تمثيلا وسيطيا له:

$E(2;6;14)$ و $\vec{u}(-18;-22;0)$ إذن: $(\Delta):\begin{cases}x=2-18t\\y=6-22t\\z=14+0t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ 01.50

التمرين الثاني: (09 نقاط)

1 - تعليم النقط A ، B ، C و H ثم كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{v}(3;-2)$ شعاع ناظمي له..... 00.50



	00.50	$(\Delta): 3x_A - 2y_A + c = 0$ و منه: $c = -4$ إذن: $(\Delta): 3x - 2y - 4 = 0$ .....
		2 - لتكن (γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$
		أ) اثبات أن (γ) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها r يطلب حسابه:
		لدينا: $L = \frac{(-10)^2 + (2)^2 - 4(13)}{4} = 13$ و منه (γ) دائرة مركزها: $\omega\left(-\frac{(-10)}{2}; -\frac{2}{2}\right)$ أي: $\omega(5;-1)$
	00.50	و منه: $\omega = B$ و نصف قطرها: $r = \sqrt{L} = \sqrt{13} =$ .....
	00.25	ب) رسم المستقيم (Δ) و الدائرة (γ) :.....
		ت) التحقق حسابيا أن $A \in (\gamma)$ ثم تحديد بدقة قيمة $d(B,(\Delta))$ المسافة بين النقطة B و والمستقيم (Δ)
	00.25	لدينا: $x_A^2 + y_A^2 - 10x_A + 2y_A + 13 = 4 + 1 - 20 + 2 + 13 = 0$ .....
	00.50	$d(B;(\Delta)) = \frac{\lvert 3x_B - 2y_B - 4 \rvert}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} = r$ .....
		ث) استنتاج الوضعية النسبية لكل من (Δ) و (γ) :
	00.50	بما أن $d(B;(\Delta)) = \sqrt{13} = r$ و $A \in (\Delta) \cap (\gamma)$ فان: (Δ) مماس للدائرة (γ) في النقطة A .....
		3 - حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ بطريقتين و استنتج قيمة مقربة بالدرجات لقيس الزاوية $A\hat{B}C$
09	00.50	لدينا: $\overrightarrow{BA}(-3;2)$ و $\overrightarrow{BC}(3;4)$ فان: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-3)(3) + (2)(4) = -1$ .....
	00.25	من جهة أخرى: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos A\hat{B}C = \sqrt{13} \times 5 \times \cos A\hat{B}C$ .....
	00.25	و منه: $\cos A\hat{B}C = \frac{-1}{5\sqrt{13}}$ و منه: $A\hat{B}C \approx 93.18$ .....
		4 - حساب الطول BH بطريقتين:
	00.25	لدينا: $H\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ و منه: $H(5;2)$. و لدينا: $B(5;-1)$ إذن: $BH = 3$ .....
	00.25	من جهة أخرى: حسب مبرهنة المتوسط لدينا: $BA^2 + BC^2 = 2BH^2 + \frac{1}{2}AC^2$ .....
	00.50	و منه: $\sqrt{13}^2 + 5^2 = 2BH^2 + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{10}\right)^2$ و منه $BH^2 = 9$ و بالتالي: $BH = 3$ .....
		5 - تحديد طبيعة و عناصر مجموعة النقط N من المستوي علما ان: $NA^2 + NC^2 = 21$
		حسب مبرهنة المتوسط لدينا: $2NH^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 21$ و منه: $2NH^2 + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 21$
	00.25	و هكذا: $NH^2 = \frac{21}{2} - 10 = \frac{1}{2}$ و منه: $NH = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .....

مجموعة النقط N في هذه الحالة هي دائرة مركزها H و نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 00.25

6 مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=0$ هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ 00.25

بتطبيق العبارة التحليلية للجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1)$ و $\overrightarrow{CM}(x-8;y-3)$ نجد:

$(x-2)(x-8)+(y-1)(y-3)=0$ أي أن: $x^2+y^2-10x-4y+19=0$ 00.25

7 ليكن h التحاكي الذي مركزه $O(0;0)$ و نسبته $-\frac{1}{2}$. نسمي (γ') و (Δ') صورتي (γ) و (Δ) على الترتيب بالتحاكي h .

أ) تعيين احداثيي كل نقطة من النقط A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحاكي h .

$A'=h(A)$ معناه: $\overrightarrow{OA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ و بالتالي: $A'\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ 00.25

$B'=h(B)$ معناه: $\overrightarrow{OB'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و بالتالي: $B'\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ 00.25

$C'=h(C)$ معناه: $\overrightarrow{OC'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ و بالتالي: $C'\left(-4;-\frac{3}{2}\right)$ 00.25

ب) استنتاج معادلة ديكارتية لكل من الدائرة (γ') و المستقيم (Δ') :

$(\gamma'):(x-x_{B'})^2+(y-y_{B'})^2=[|k|\times r]^2$ أي: $(\gamma'):\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left[\left|-\frac{1}{2}\right|\times\sqrt{13}\right]^2$

$(\gamma'):x^2+y^2+5x-y+\frac{13}{4}=0$ 00.50

(Δ') يشمل A' و يوازي (Δ) أي $\vec{v}(3;-2)$ هو أيضا ناظمي لـ: (Δ') 00.25

$(\Delta'):3x_{A'}-2y_{A'}+c'=0$ ومنه: $c'=2$ أي أن: $(\Delta'):3x-2y+2=0$ 00.50

ت) محيط (γ') هو: $2\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)=\pi\sqrt{13}(u;l)$ و مساحتها: $\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=\frac{13\pi}{4}(u;a)$ 00.50

	00.25	محيط المثلث $A'B'C'$ هو: $\left\|-\frac{1}{2}\right\|\times\left(5+\sqrt{13}+2\sqrt{10}\right)=\frac{5+2\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}(u;l)$ .....
	00.25	**و مساحته هي:** $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}BA\times BC\times\sin B\approx\frac{5\sqrt{13}}{8}\times\sin\left(93.18^\circ\right)\approx 2.25(u;a)$ .....
		التمرين الثالث: (04 نقاط)
	00.25	1) المعادلة: $x^2-3x+2=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين هما $x=1$ أو $x=2$ .....
		$\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ إذن: $0<\cos\theta\leq 1$
	00.25	حسب نتائج دساتير الجمع لدينا: $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$ .....
		إذن: المعادلة: $\cos(2\theta)-6\cos\theta+5=0$ تكافئ المعادلة: $(2\cos^2\theta-1)-6\cos\theta+5=0$
		إذن: $2\cos^2\theta-6\cos\theta+4=0$
	00.50	و منه: $\cos^2\theta-3\cos\theta+2=0$ .....
		بوضع: $x=\cos\theta$ نجد: $x^2-3x+2=0$
	00.25	إذن: $x=1$ أو $x=2$ أي: $\cos\theta=1$ أو $\cos\theta=2$ .....
04	00.25	المعادلة: $\cos\theta=2$ لا تقبل حلول لأنه من أجل كل θ من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $0<\cos\theta\leq 1$ .....
	00.25	المعادلة: $\cos\theta=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و هو $\theta=0$ .....
	00.25	إذن المعادلة: $\cos(2\theta)-6\cos\theta+5=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هو الصفر.....
		2) حساب $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ بطريقتين:
	00.50	**الطريقة الأولى:** لدينا: $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ .....
		الطريقة الثانية: نعلم أن: $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ ، و بالتالي فان:
	00.50	$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]=2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .....(⊗).....
	00.50	و لكن: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ .....
		و منه: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
	00.25	و منه: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ .....
	00.25	بالتعويض في العلاقة: (⊗) نجد: $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)=2\left(\frac{2-6}{16}\right)=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$ .....
		من إعداد الأستاذ: مراحي لزهر