التمرين الأول : (05 نقاط)

في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ نعتبر كثير الحدود : $P(z)=z^3-2(1-i)z^2+4(1-i)z+8i$

❶ ① أثبت أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يُطلب تعيينه .

② حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ حيث تقبل هذه المعادلة حلين مترافقين z_1 و z_2 .

❷ في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق :

$z_A=-2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}i$ و $z_C=1-\sqrt{3}i$ على الترتيب .

① أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $\left[\dfrac{z_A z_C}{4}\right]^n$ حقيقيا سالبا .

② عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي OBDC متوازي الأضلاع .

③ أكتب العدد المركب $\dfrac{z_0-z_D}{z_B-z_C}$ على الشكل الجبري ثم استنتج طبيعة متوازي الأضلاع OBDC.

④ عين نسبة و زاوية التشابه المباشر f الذي يُحول A الى C و يُحول D الى B ثم استنتج وفق f لاحقة النقطة I مركز OBDC.

⑤ - عين L مجموعة قيم العدد الحقيقي m حتى تكون النقطة Ω_m مرجح للجملة المثقلة :

$\{(O;2-m);(B;m);(D;2m-1);(C;3m-2)\}$ ثم حدد بدلالة m لاحقة النقطة Ω_m .

- عين طبيعة (Γ_1) مجموعة النقط Ω_m من المستوي لما m تمسح المجموعة L.

⑥ عين طبيعة (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي و التي تحقق : $MO^2+MB^2+MC^2+MD^2=8$

التمرين الثاني : (06 نقاط)

لتكن الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $\begin{cases} f(x)=2e^{x-1}-1 & / x\le 1 \\ f(x)=1+\ln x & / x>1 \end{cases}$

نسمي (C) المنحنى الممثل لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$

❶ أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة على $\mathbb{R}$.

❷ ادرس اشتقاقية الدالة f عند القيمة $x_0=1$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

❸ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل يُطلب تعيين معادلته .

❹ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

❺ أثبت أن المنحنى (C) يقبل مماسين معامل توجيههما هو $\dfrac{1}{e}$ يُطلب تعيين معادلتيهما .

❻ لتكن الدالة العددية h_1 ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي : $h_1(x)=\ln x-\dfrac{1}{e}x$

① أدرس إتجاه تغير الدالة h_1 ثم استنتج إشارة $h_1(x)$.

② ماهي الوضعية النسبية للمنحنى (C) مع المماس ؟ علل إجابتك .

❼ لتكن الدالة العددية h_2 ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على $]-\infty ; 1]$ كمايلي : $h_2(x) = 2e^x - x - 1 - ln\, 2$

① أدرس إتجاه تغير الدالة h_2 ثم استنتج إشارة $h_2(x)$.

② ماهي الوضعية النسبية للمنحنى (C) مع المماس ؟ علل إجابتك .

❽ مثل المماسين و المنحنى (C).

❾ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (d_m) حيث $(d_m): y = \frac{1}{e}x + m$

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

ليكن ABCD رباعي وجوه حيث ABC ، ABD و ACD ثلاث مثلثات قائمة في A و متساوية الساقين .

نسمي A_1 مركز ثقل المثلث BCD و نضع $AB = AC = AD = a$.

❶ أثبت أن المستقيم (AA_1) عمودي على المستوي BCD . (يمكن حساب الجداءات السلمية $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC}$)

❷ عبّر بطريقتين مختلفتين عن حجم رباعي الوجوه ABCD ثم استنتج طول القطعة المستقيمة $[AA_1]$.

❸ نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;1);(C;1);(D;1)\}$ و I منتصف $[BC]$.

① أثبت أن G تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[AA_1]$ ثم عين الطول AG .

② عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

❹ لتكن H نظيرة A بالنسبة إلى G .

① أثبت أن : $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$

② أثبت أن : $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$

③ إستنتج أن : $HC = HD$

التمرين الرابع : (04,5 نقاط)

❶ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2772 ، 1260 و 504 .

❷ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $2772x - 1260y = 504$..............(1)

① عين الحل الخاص $(x_0 ; y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق : $2x_0^2 - 3y_0 = -4$

② باستعمال الحلّ الخاص المتحصل عليه ، حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (1).

❸ نفرض أن x و y عددان طبيعيان حيث $(x ; y)$ هو حل للمعادلة (1).

① عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

② عين كل الثنائيات $(x ; y)$ بحيث يكون العددان x و y أوليين فيما بينهما.

❹ ① نفرض من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن : $6^n \equiv 6[10]$

عين رقم آحاد الأعداد المختلفة و المشكلة من قوى العدد 2 ثم استنتج رقم آحاد العدد 2018^{1439} .

② عين الثنائيات $(x ; y)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و التي تحقق : $2^{y-2x} \equiv 8[10]$