الثانويات : عيسى زريمش شعلال مسعود	تصحيح اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات	2018 - 2017 الشعبة : تقني رياضي

التمرين الأول :

$(I$ f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{x^2+3}}$

بما ان : $f'(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2) نبين أنــه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$

لدينا: الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=0$،

الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند $x=0$ في المجال $[0;+\infty[$. اذن: من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$

$(II$ (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$، $u_{n+1}=f(u_n)$

حساب u_1 و u_2: $u_1=f(u_0)=\frac{1}{2}\sqrt{u_0^2+3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$u_2=f(u_1)=\frac{1}{2}\sqrt{u_1^2+3}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

2) أ/نبين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n\prec u_{n+1}\prec 1$

* من اجل $n=0$: $0\leq u_0\prec u_1\prec 1$ محققة لأن

$(u_0=0$ ، $u_1\approx 0.86)$ ...(1)

*نفرض أن : $0\leq u_n\prec u_{n+1}\prec 1$ ونبرهن ان :

$0\leq u_{n+1}\prec u_{n+2}\prec 1$ حيث n عدد طبيعي .

لدينا: f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(1)=1$ و $f(0)=0$

إذا كان $0\leq u_n\prec u_{n+1}\prec 1$ فإن

$f(0)\leq f(u_n)\prec f(u_{n+1})\prec f(1)$

أي : $0\leq u_{n+1}\prec u_{n+2}\prec 1$ ....(2)

من (1) و(2) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n\prec u_{n+1}\prec 1$

ب*/ استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة: لدينا

من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n\prec u_{n+1}\prec 1$ معناه أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+3}$

المتتالية (u_n) متقاربة نحو l معناه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$

يكافئ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n^2+3}$ $\quad l=\frac{1}{2}\sqrt{l^2+3}$

يكافئ $(2l)^2=\left(\sqrt{l^2+3}\right)^2$ و $l>0$

يكافئ $4l^2=l^2+3$ و $l>0$

يكافئ $l=1$ (مقبول) أو $l=-1$ (مرفوض)

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

$(III$ لدينا :من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n^2-1$

1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

(v_n)م.هـ معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=qv_n$

$v_{n+1}=u_{n+1}^2-1=\frac{1}{4}(u_n^2+3)-1=\frac{1}{4}(u_n^2-1)$

$v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ ومنه (v_n)م.هـ أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول

$v_0=u_0^2-1=-1$

2) التعبير عن v_n بدلالة n : $v_n=v_0q^n=-\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n: لدينا $u_n^2=v_n+1$

ومنه: $u_n=\sqrt{v_n+1}$ (لأن $u_n>0$)

اذن: $u_n=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

3) حساب نهاية (u_n): $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=1$

4) التعبير عن المجاميع التالية بدلالة n:

$S_n=(u_0-1)(u_0+1)+(u_1-1)(u_1+1)$

$+(u_2-1)(u_2+1)+.........+(u_n-1)(u_n+1)$

$=(u_0^2-1)+(u_1^2-1)+(u_2^2-1)+....+(u_n^2-1)$

$=v_0+v_1+v_2+......+v_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

ومنه: $S_n=\left(\frac{-4}{3}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

3as.ency-education.com

$$S_n'=(u_0^2-0)+(u_1^2-1)+........+(u_n^2-n)$$
$$=u_0^2+u_1^2+.....+u_n^2-(0+1+2+....+n)$$
$$=(v_0+1)+(v_1+1)+....(v_n+1)-\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)(0+n)\right]$$
$$=(v_0+v_1+....+v_n)+(n+1).1-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{3}$$

التمرين الثاني :

1 / أ *تعيين حلول المعادلة: $8x-5y=3$ ؛ (E)

واضح أن الثنائية $(1;1)$ هي حل خاص للمعادلة (E) ، عندئذ نجد $x=5k+1$ و $y=8k+1$ حيث k عدد صحيح

ب* إثبات أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة (E) و استنتاج أن: $m\equiv 9[40]$

من المعطيات فإن الأعداد الصحيحة m و p و q تحقق العلاقة $8p=m-1$ و $5q=m-4$

و هذا يعني أن: $8p-5q=3$ ومنه الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E) وبالتالي يوجد عدد صحيح λ حيث $p=5\lambda+1$ ولدينا $m=8p+1$ أي $m=8(5\lambda+1)+1=40\lambda+9$

و هذا يعني أن: $m\equiv 9[40]$

جـ * تعيين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000 :

$40k+9\geq 2000$ معناه $k\geq 49,775$ ومنه أصغر قيمة هي $k=50$ و هذا يعطي القيمة المطلوبة لـ m و هي $m=2009$

2 / أ * إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$:

لدينا $2^3=8$ أي $2^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب * تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 :

$2^{2009}=2^{3\times 669}\times 2^2$ إذن $2^{2009}\equiv 1\times 4[7]$ ومنه $2^{2009}\equiv 4[7]$

3 / أ * التحقق من أن: $10^3\equiv -1[7]$:

لدينا $10^3+1=1001=7\times 143$ ومنه $10^3\equiv -1[7]$

ب* استنتاج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7 في الحالة $a\equiv 2[7]$ و $b\equiv 2[7]$

لدينا $N=a\times 10^3+b$ ولدينا $a\times 10^3\equiv -a[7]$ إذن $a\times 10^3+b\equiv -a+b[7]$ ومنه يكون $N\equiv 0[7]$ إذا وفقط إذا كان $a\equiv b[7]$

ولدينا $a\equiv 2[7]$ إذن $b\equiv 2[7]$ ، ومنه القيم الممكنة للعددين a و b هي $a=2$ أو $a=9$ و $b=2$ أو $b=9$

ومنه هناك أربعة قيم ممكنة للعدد الطبيعي N وهي:

2002;2009;9002;9009

التمرين الثالث :

1 / أ * الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_8^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}=56$$

ب* حساب احتمال الأحداث

A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

$$P(A)=\frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}}=\frac{C_3^3+C_4^3}{56}=\frac{1+4}{56}=\frac{5}{56}$$

B : " الحصول على كرة على الأقل حمراء "

$$P(B)=\frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}}$$
$$=\frac{C_4^1\times C_4^2+C_4^2\times C_4^1+C_4^3\times C_4^0}{56}$$
$$=\frac{24+24+4}{56}=\frac{52}{56}=\frac{13}{14}$$

C : " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء "

$$P(C)=\frac{C_4^0\times C_4^3+C_4^1\times C_4^2+C_4^2\times C_4^1}{56}$$
$$=\frac{4+24+24}{56}=\frac{52}{56}=\frac{13}{14}$$

2 / تعيين قيم X : $X(\Omega)=\{1;2;3\}$

$$P(X=1)=P(A)=\frac{5}{56}$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_1^1}{56}$$
$$=\frac{4\times 3\times 1}{56}=\frac{12}{56}=\frac{3}{14}$$

3as.ency-education.com

استنتاج $P(X=2)$:

لدينا : $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

ومنه

$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)$$
$$=1-\frac{5}{56}-\frac{12}{56}=\frac{39}{56}$$

ومنه قانون توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

ج - حساب الامل الرياضي :

$$E(X)=\left(1\times\frac{5}{56}\right)+\left(2\times\frac{39}{56}\right)+\left(3\times\frac{12}{56}\right)=\frac{119}{56}\approx 2.13$$

*** حساب التباين والانحراف المعياري :**

$$v(X)=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-E(X)\right)^2\times p_i\approx 0.29$$

$$\sigma(X)=\sqrt{v(X)}\approx 0.54$$

التمرين الرابع :

I. الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=x-1+e^{-x}$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=1-e^{-x}$

* $g'(x)=0$ معناه : $1-e^{-x}=0$

معناه : $-x=0$ معناه : $x=0$

* $g'(x)>0$ معناه : $1-e^{-x}>0$

معناه : $-e^{-x}>-1$ معناه : $e^{-x}<1$

معناه : $-x<0$ معناه : $x>0$ ومنه

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g متزايدة تماما على $[0\ ;\ +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty\ ;0]$

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{x}\right)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

2) أ - اثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد معدوم :

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى عند 0 هي 0 ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا معدوما في $\mathbb{R}$.

ب - استنتاج اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب :

$$f(x)=ln(x-1+e^{-x})$$

1) حساب النهايات :

أ *

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب *

$$\lim_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)=-\infty\ ;\quad \lim_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)=-\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور التراتيب) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(x)=ln(g(x))$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1-e^{-x}}{x+1+e^{-x}}$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g'(x)$ لأن : $g(x)>0$ من أجل $x\neq0$

الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) أ - اثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$f(x)=-x+ln(xe^x-e^x+1)$

لدينا : $f(x)=ln(x-1+e^{-x})$

$$f(x)=ln\left(e^{-x}(xe^x-e^x+1)\right)$$
$$=ln(e^{-x})+ln(xe^x-e^x+1)$$
$$=-x+ln(xe^x-e^x+1)$$

ب - استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$:

بما أن $\lim_{x\to-\infty}(xe^x-e^x+1)=0$ فان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$.

3as.ency-education.com

جـ - دراسة الوضع النيبي لـ (Δ) و (C_f):

لدينا : $f(x)-y=ln(xe^x-e^x+1)$

$f(x)-y=0$ معناه : $ln(xe^x-e^x+1)=ln1$

معناه : $xe^x-e^x+1=1$

معناه : $e^x(x-1)=0$

معناه : $x=1$ لأن $e^x>0$

$f(x)-y>0$ معناه: $x>1$

x	$-\infty$ 0	0 1	1	1 $+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-1)$	(C_f) فوق (Δ)

4) أ - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln(x))$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ln(x))=\lim_{x\to+\infty} ln\frac{x-1+e^{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} ln\frac{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{e^{-x}}{x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{e^{-x}}{x}\right)=0$$

الاستنتاج: المنحنى (C_{ln}) هو منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب - الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_{ln}) على $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x)-\ln x=\ln\frac{x-1+e^{-x}}{x}=\ln\left(1+\frac{-1+e^{-x}}{x}\right)$$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا $-x<0$ ومنه $e^{-x}<1$ إذن

$\frac{-1+e^{-x}}{x}<0$ وهذا يكافئ $1+\frac{-1+e^{-x}}{x}<1$

ومنه $\ln\left(1+\frac{-1+e^{-x}}{x}\right)$ إذن $f(x)-\ln x<0$

ومنه (C_f) يقع تحت $(C_{\ln})$ على المجال $]0;+\infty[$

5) تبيان ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]-\infty\ ;0[$ و منه فهي مستمرة و رتيبة تماما على $]-1.2\ ;\ -1.1[$ و

$f(-1.2)=0.11$ و $f(-1.1)=-0.10$

بما أن $f(-1.2)f(-1.1)<0$ فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$-1.2<\alpha<-1.1$$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]0;+\infty[$ و منه مستمرة و رتيبة تماما على $]1.8\ ;\ 1.9[$ و $f(1.8)=-0.03$

$$f(1.9)=0.04$$

بما أن $f(1.8)f(1.9)<0$ فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$$1.8<\beta<1.9$$

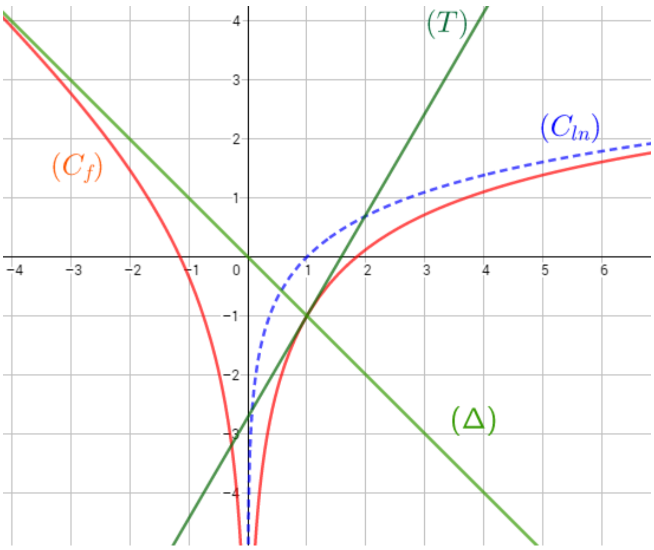
6) أ - كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$(T): y=(e-1)(x-1)-1$$

$$(T): y=(e-1)x-e$$

ب - الانشاء



7) المناقشة البيانية :

(E) تكافئ: $ln(x-1+e^{-x})=(e-1)x+1+m$

تكافئ : $f(x)=(e-1)x+1+m$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y=(e-1)x+1+m$ الموازية لـ (T).

① إذا كان $1+m<-e$ أي $m<-1-e$ فان المعادلة (E) تقبل حلين موجبين تماما و حل سالب .

② إذا كان $1+m=-e$ أي $m=-1-e$ فان المعادلة (E) تقبل حل مضاعف موجب و حل سالب .

③ إذا كان $1+m>-e$ أي $m>-1-e$ فان المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا سالب .

3as.ency-education.com