عرض حال الامتحان الثاني – الثالثة تقني رياضي 2017

التمرين الأول: (04 نقاط)

$A(1;0;1)$ ، $B(2;-1;1)$ و $C(0;1;1)$

1) التحقق أن النقط A ، B و C لا تعين مستويا وحيدا:

$\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$

بما أن: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي النقط A ، B و C على استقامة واحدة ومنه النقط A ،B وC تعين ما لا نهاية من المستويات.وهي حزمة المستويات المتقاطعة وفق المستقيم المار بالنقط الثلاث.

2) (P_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق:

$m.x-y+(2-m).z+m+4=0$ ، m عدد حقيقي

أ) نبين أن (P_m) مستوى من أجل كل عدد حقيقي m :

لدينا:من أجل كل m من $\mathbb{R}$ الثلاثية $(m;-1;2-m)\neq(0;0;0)$

ومنه: (P_m) مستوي من أجل كل عدد حقيقي m .

ب) نبين ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا لـه :

$m.x-y+(2-m).z+m+4=0$ يكافئ

$(-y+2z+4)+m(x-z+1)=0$ يكافئ

$(x-z+1=0)$ و $(-y+2z+4=0)$

ومنه: (Δ) معرف بالجملة : $\begin{cases}x-z+1=0\\ y-2z-4=0\end{cases}$

أي أن $\begin{cases}x=-1+z\\ y=4+2z\end{cases}$ بوضع: $z=t$ ، t عدد حقيقي

ومنه:التمثيل الوسيطي لـ(Δ) هو: $\begin{cases}x=-1+t\\ y=4+2t\\ z=t\end{cases}$ $;t\in\mathbb{R}$

3)أ)حساب إحداثيات النقطة H حيث $2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

بما أن: $2-1+e\neq 0$ فإن النقطة H موجودة و وحيدة هي مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;e)\}$

$$\begin{cases}x_H=\dfrac{2x_A-1x_B+e.x_C}{2-1+e}=0\\ y_H=\dfrac{2y_A-1y_B+e.y_C}{2-1+e}=1\\ z_H=\dfrac{2z_A-1z_B+e.z_C}{2-1+e}=1\end{cases}$$ ومنه: $H=C(0,1,1)$

ب) المسافة بين النقطة H و المستقيم (Δ): لتكن النقطة H' المسقط العمودي لـ H على المستقيم (Δ)، $\vec{u}(1,2,1)$ شعاع توجيهه ، $\overrightarrow{HH'}(x_{H'},y_{H'}-1,z_{H'}-1)$

معناه $\begin{cases}\overrightarrow{HH'}.\vec{u}=0\\ H'\in(\Delta)\end{cases}$,$t\in\mathbb{R}$ معناه $\begin{cases}x_{H'}+2y_{H'}+z_{H'}-3=0\\ x_{H'}=-1+t\\ y_{H'}=4+2t\\ z_{H'}=t\end{cases}$

معناه $(-1+t)+2(4+2t)+t-3=0$ ومنه $t=\dfrac{-2}{3}$

$$H'\left(\frac{-5}{3};\frac{8}{3};\frac{-2}{3}\right)$$

$$d(H;(\Delta))=HH'=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}-0\right)^2+\left(\frac{8}{3}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-1\right)^2}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

4) أ) إيجاد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e.\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}.(1+e)$:

$M\in(S)$ معناه $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e.\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}.(1+e)$

معناه $\left\|(2-1+e)\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{5}.(1+e)$ معناه $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{5}$

ومنه (S) سطح كرة مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{5}$

ب) إيجاد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S) :

المستويات (P_m) تمس المجموعة (S) معناه $d(H;(P_m))=\sqrt{5}$

$$d(H;(P_m))=\frac{|mx_H-y_H+(2-m)z_H+m+4=0|}{\sqrt{m^2+(-1)^2+(2-m)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}$$

$\dfrac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=\sqrt{5}$ معناه $\sqrt{5}\sqrt{2m^2-4m+5}=5$

معناه $m^2-2m=0$ معناه $m=0$ أو $m=2$ ومنه:

$(p_2):2x-y+6=0$ أو $(p_0):-y+2.z+4=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=-4$ ، بما أن $\Delta\prec 0$ فان المعادلة تقبل حلين متمايزين

$z_1=\sqrt{3}-i$ أو $z_2=\sqrt{3}+i$ ومنه: $S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي:

$$z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\text{ ، }z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

2) أ) كتابة العدد L على الشكل الأسي ثم حساب L^{2016}:

لدينا: $z_A=2i$, $z_B=\sqrt{3}+i$, $z_C=\overline{z_B}$ ، $L=\dfrac{(1-i)z_B}{z_C}$

$z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_C=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ ، $1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

ومنـــه: $L=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}e^{i.2016\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}^{2016}e^{i.168\pi}$$

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}\left[\cos(186\pi)+i\sin(186\pi)\right]=\sqrt{2}^{2016}$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n تخيلي صرف:

لدينا: $L=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$، أي أن $L^n=\sqrt{2}^n e^{i\left(n\frac{\pi}{12}\right)}$

$$L^n=\sqrt{2}^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{12}\right)+i.\sin\left(n\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

L^n عدد تخيلي صرف معنـاه $\cos\left(n\frac{\pi}{12}\right)=0$

معناه $n\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه: $n=12k+6$ ، $k\in\mathbb{N}$

3) أ) نبين أنه يوجد دوران r مركزه النقطة B و يحول A إلى C، يطلب تعيين زاويته: ليكن r تحويل عبارته المركبة من الشكل $z'=a.z+b$ حيث $a;b$ عددا ن مركبان

لدينا: $\begin{cases} r(A)=C \\ r(B)=B \end{cases}$ معناه $\begin{cases} z_C=a.z_A+b...(1) \\ z_B=a.z_B+b...(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $a=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

من(2) نجد : $b=z_B-az_B=z_B(1-a)=2\sqrt{3}$

ومنه: $z'=\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2\sqrt{3}$ بما ان $|a|=\left|\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$

فإن r هو دوران مركزه B وزاويته $\arg(a)=\frac{2\pi}{3}$

ب)استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته :

لدينا: $AB=BC$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2\pi}{3}$

اذن المثلث ABC متقايس الضلعين

لتكن $z_{B'}$ لاحقة منتصف $[AC]$، $z_{B'}=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$[BB']$ارتفاع و عمود و متوسط و محور متعلق بـ$[AC]$

في المثلث ABCالمتقايس الضلعين مساحته $S=\frac{BB'\times AC}{2}$

$AC=|z_C-z_A|=2\sqrt{3}$ ، $BB'=|z_{B'}-z_B|=1$ ومنه: $S=\sqrt{3}ua$

4) أ)تعيين(E_1) مجموعة النقطM ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب: لدينا: $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}=\frac{z-z_C}{z-z_A}$

$\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب معناه $\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)=2\pi k;k\in\mathbb{Z}$

$$\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC}\right)=2\pi k;k\in\mathbb{Z}$$

ومنه: (E_1) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$

ب)تعيين(E_2) مجموعة النقطM ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ **عندما** θ **يمسح** $\mathbb{R}$:

لدينا: $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}=i\left(i+\sqrt{3}+2e^{i\theta}\right)$

أي أن: $z=\sqrt{3}+i+2e^{i\theta}=z_B+2e^{i\theta}$ ، θ يمسح $\mathbb{R}$

ومنه: (E_2) هي دائرة مركزها النقطة B و نصف قطرها 2

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نبين أن العدد2017 أولي: $\sqrt{2017}\approx44.91$

بما أن 2017 لا يقبل القسمة على الاعداد الاولية الاصغر من $\sqrt{2017}$ فإن 2017 عدد أولي.

2)أ)إيجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد:

$14119;10085;22187$ لدينا: $14119=7\times2017$ ، $10085=5\times2017$ ، $22187=11\times2017$ ومنه:

$$pgcd(14119;10085;22187)=2017$$

تصبح المعادلة $(E): 7x-5y=11$

ب) نبين أن الثنائية$(3;2)$حلا خاصا للمعادلة (E):

بالتعويض في المعادلة (E) نجد: $7(3)-5(2)=11$ محققة .

تعيين حلول المعادلة (E): $\begin{cases} 7x-5y=11...(1) \\ 7(3)-5(2)=11...(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $7(x-3)=5(y-2)$

بما أن: 7 يقسـم $5(y-2)$ والعددان5،7 أوليان فيما بينهما

فإن حسب مبرهنة غوص نجد: : 7 يقسـم $y-2$

ومنه: $y=7k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ وتعويضها في المعادلة (1)

نجد: $y=5k+3$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ومنه:

$$S=\{(5k+3;7k+2);k\in\mathbb{Z}\}$$

ج) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $pgcd(x;y)=11$.

$pgcd(x;y)=11$ معناه: $\begin{cases} x\equiv0[11] \\ y\equiv0[11] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 5k+3\equiv0[11] \\ 7k+2\equiv0[11] \end{cases}$

بالجمع نجد: $12k+5\equiv[11]$: أي $k=11k'+6$ $(k'\in\mathbb{Z})$

ومنه الثنائيات $(x;y)$ المطلوبة هي :

$(55k'+33;77k'+44)$ حيث $(k'\in\mathbb{Z})$

3)أ)دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11:

$$5^0\equiv1[11],5\equiv5[11],5^2\equiv4[11],5^3\equiv9[11],5^4\equiv1[11]$$

ومنه بواقي قسمة 5^n على 11 متتالية دورية ودورها 4.

من أجـــل كل عدد صحيح k :

قيم n	$n=4k$	$n=4k+1$	$n=4k+2$	$n=4k+3$	$[4]$
$5^n\equiv$	1	5	4	9	$[11]$

بواقي قسمة 7^n على 11:

$7^0\equiv1[11],7^1\equiv7[11],7^2\equiv5[11],7^3\equiv2[11],7^4\equiv3[11]$

$,7^5\equiv10[11],7^6\equiv4[11],7^7\equiv6[11],7^8\equiv9[11],7^9\equiv8[11],7^{10}\equiv1[11]$

ومنه بواقي قسمة 7^n على 11 متتالية دورية ودورها 10

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[10]
$7^n\equiv$	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	[11]

ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد 5^n+7^{2017} قابلا للقسمة على 11: لدينا: $2017=10(201)+7$ أي ان $7^{2017}\equiv6[11]$ أي ان: $5^n+6\equiv0[11]$ ومنه: $5^n\equiv5[11]$

إذن: $n=4k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

4) أ) التحقق أن $10^3\equiv-1[11]$:

لدينا $10\equiv-1[11]$ أي $10^3\equiv(-1)^3[11]$ ومنه $10^3\equiv-1[11]$

ب)تعيين قيم N حيث $N\equiv4[11]$:

لدينا $N=\overline{a01b}^{10}=a\cdot10^3+10+b$ أي $-a-1+b\equiv4[11]$

ومنه: $b-a\equiv5[11]$ وبما أن $a;b$ عددان طبيعيان أصغر من 8

فإن: $a=1,b=6$ و $N=1016$ أو $a=2,b=7$ و $N=2017$

أو $a=7,b=1$ و $N=7011$ ومنه قيم N هي: $7011;2017;1016$

ج)كتابة قيم العدد الطبيعي N في نظام التعداد ذي الأساس 11

$2017=\overline{1574}^{11}$, $1016=\overline{844}^{11}$, $7011=\overline{52\alpha4}^{11}$ حيث $\alpha=10$

التمرين الرابع: (07 نقط)

f المعرفة على $D_f=\mathbb{R}-\{-1;0\}$ بـ: $f(x)=x+1+2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

1) دراسة تغيرات الدالة f:

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+1+2\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x+1+2\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\right)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$

اتجاه التغير:

f قابلة للاشتقاق على D_f دالتها المشتقة f': $f'(x)=\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}$

$f'(x)=0$ معناه $x^2+x-2=0$ معناه $x=-2$ أو $x=1$

$]-0.6;-0.5[$ ، **ثم تفسير النتيجة :**

x	$-\infty$ -2	-2 -1	-1 0	0 1	1 $+\infty$
x^2+x-2	+ 0	−	−	− 0	+
$x(x+1)$	+	+	−	+	+
$f'(x)$	+ 0	−	+	− 0	+

$]-\infty;-2]\cup]-1;0[\cup[1;+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $[-2;-1[\cup]0;1]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1-\ln4$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2+\ln4$	↗	$+\infty$

2) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها:

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f مرتين: $f''(x)=\frac{4x+2}{[x(x+1)]^2}$

x	$-\infty$ -1	-1 $-1/2$	$-1/2$ 0	0 $+\infty$
$4x+2$	−	− 0	+	+
$f''(x)$	−	− 0	+	+

بما ان: $f''(x)$ تنعدم عند $x=\frac{-1}{2}$ مغيرة إشارتها فإن المنحنى

(C_f) يقبـــل $\omega\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف له

ب*/ x **عدد حقيقي من** D_f**: حساب** $f(-1-x)+f(x)$

x من D_f، $(-1-x)$ من D_f : $f(-1-x)+f(x)=1$

تفسير النتيجة بيانيا : لدينا: $f(-1-x)+f(x)=1$ أي أن

$f\left(2\left(\frac{-1}{2}\right)-x\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)-f(x)$

ومنه: النقطة $\omega\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

3) أ) نبرهن انه يوجد مماس (Δ) للمنحنى (C_f) يعامد المستقيم ذو المعادلة $x+9y=0$، يطلب كتابة معادلة المماس (Δ)

$x+9y=0$ معناه $y=\frac{-1}{9}x$ معناه معامل توجيه هذا المستقيم

$f'(x).\frac{-1}{9}=-1$ معناه $\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}\left(\frac{-1}{9}\right)=-1$ معناه $4x^2+4x+1=0$

ومنه: $x=\frac{-1}{2}$ اذن يوجد مماس (Δ) وحيد للمنحنى (C_f) في

النقطة $\omega\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$ معادلته: $y=9x+5$

بين أن المعادلة: $\frac{1}{e^{x+1}}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ **تقبل حلا وحيدا في المجال**

$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{1}{e^{x+1}}$ يكافئ $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\ln\left(\frac{1}{e^{x+1}}\right)$ يكافئ

$2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=-x-1$ يكافئ $x+1+2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=0$ يكافئ $f(x)=0$

$f(-0.5)=0.5$ ، $f(-0.6)=-0.41$

بما ان الدالة f مستمرة متزايدة تماما على $]-0.6;-0.5[$ ،

و $f(-0.6)f(-0.5)\prec 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $\frac{1}{e^{x+1}}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ تقبل حل وحيد α في $]-0.6;-0.5[$

المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها

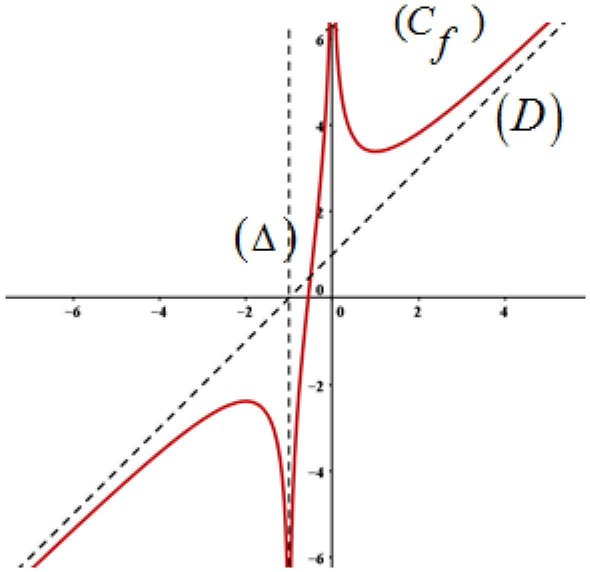
α حيث $-0.6\prec\alpha\prec-0.5$

4) أ)دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y=x+1$: ندرس اشارة الفرق

$$f(x)-y=2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

x	$-\infty$ … -1	-1 … $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ … 0	0 … $+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)	(C_f) تحت (D)	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في $\omega\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$	(C_f) فوق (D)	(C_f) فوق (D)

ب) رسم (Δ) ، (D) و (C_f):



5) ليكن المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y=m\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

****نبين أنه عندما يتغير m في ℝ جميع المستقيمات (D_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها :** m وسيط حقيقي

$y=m\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ معناه $m\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(-y+\frac{1}{2}\right)=0$

معناه $x+\frac{1}{2}=0$ و $-y+\frac{1}{2}=0$ معناه $x=-\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{2}$ ومنه:

جميع المستقيمات (D_m) تمر من النقطة الثابتة $\omega\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$