التمرين الاول:

$Z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $Z_B = 1-i$ ، $Z_C = 2Z_B = 2-2i$

تمثيل النقط:

$A(1;\sqrt{3})$ صورة العدد المركب: $Z_A = 1+i\sqrt{3}$

$B(1;-1)$ صورة العدد المركب: $Z_B = 1-i$

$C(2;-2)$ صورة العدد المركب: $Z_C = 2-2i$

نمثل النقط A B ; C في المستوي المنسوب الى معلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

كتابة كل من z_A و z_B ، $z_A \times z_B$ على الشكل المثلثي

$Z_A = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ ، $Z_B = \sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4})$

بالنسبة لـ $z_A \times z_B$: $|Z_A \times Z_B| = |Z_A|\times|Z_B| = 2\sqrt{2}$

$Arg(Z_A\times Z_B) = Arg(Z_A)+Arg(Z_B)$

$= \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

$Z_A\times Z_B = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

اكتب $z_A \times z_B$ على الشكل الجبري:

$z_A\times z_B = \sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

استنتاج القيم المضبوطة لكل من : $\sin\frac{\pi}{12}$ ، $\cos\frac{\pi}{12}$

بالمطابقة بين الشكل الجيري والشكل المثلثي لـ $z_A\times z_B$

إذن : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

تعين طبيعة مجموعة النقط: (F) : $|Z-1-i\sqrt{3}| = |Z-1+i|$

$|Z-(1+i\sqrt{3})| = |Z-(1-i)|$ اي $|Z-Z_A| = |Z-Z_B|$

ومنه $AM = BM$ (F) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$

مجموعة النقط: (T) : $Arg(\overline{Z}-1-i) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

$C\in(T)$ معناه المساواة $Arg(\overline{Z_C}-1-i) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ محققة

لنتأكد:

$Arg(\overline{(2-2i)}-1-i) = Arg(2+2i-1-i)$

$= Arg(1+i)$

$= \frac{\pi}{4}+2k\pi$

اذن: صحيح $C\in(T)$.

تعين طبيعة مجموعة النقط (T) :

$Arg(\overline{Z}-1-i) = Arg(\overline{Z-1+i}) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

$-Arg(Z-1+i) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

$Arg(Z-(1-i)) = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$(\vec{U};\overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ومنه مج النقط هي نصف المستقيم $[BM)-\{B\}$ الذي يشمل النقطة C

اي $[BC)-\{B\}$ الذي ميله $tag(-\frac{\pi}{4})$.

التمرين الثاني:

لتكن النقط: $A(1,1,1)$ ، $B(3,2,0)$

المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل B و عمودي على المستقيم (AB) :

ط1) معناه: $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) ويشمل B معناه:

هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق:

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

اي : $(P): 2x+y-z-5=0$

ط2) $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) معناه معادلة (P)

من الشكل: $2x+y-z+d=0$ ، (P)

ويشمل B معناه: $d=-5$

اي معادلة المستوي (P) هي $(P): 2x+y-z-5=0$.

المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) ذات المركز A و نصف القطر AB

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي الى (S) معناه:

$AM = AB = \sqrt{6}$ ومنه مباشرة بعد الحساب نجد:

$$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$$

هل المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S) : نعم

التبرير: $d(A;(Q)) = AB = \sqrt{6}$.

بين ان المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) هي النقطة $C(0,2,-1)$.

ط1) نتأكد من ان $C\in(Q)$ و $d(A;(Q)) = AC = \sqrt{6}$

ط2) نتأكد من ان : $C\in(Q)$ و $\overrightarrow{AC}\parallel \vec{n}_Q$.

تبيان ان (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) حيث تمثيله الوسيطي

$$(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=4-3t \end{cases}$$

ط1) نتأكد من ان : $\overrightarrow{AB}$ ش نظ لـ (P) و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيا و

$(\Delta)\subset(Q)$ و $(\Delta)\subset(P)$

نعوض احداثيات المستقيم (Δ) في كل من (P) و(Q) نجد $0=0$

ط2) نتأكد من ان : $\overrightarrow{AB}$ ش نظ لـ (P) و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيا

ثم نحل الجملة : $\begin{cases} 2x+y-z-5=0 \\ x-y+2z+4=0 \end{cases}$ ثم نضع $z=4-3t$

او نضع $x=t$ مع $t\in\mathbb{R}$ $y=12-5t$

تحقق ان A لا تنتمي الى المستقيم (Δ) : نجد ان: $t=1\neq\frac{11}{5}\neq 1$

اذن : A لا تنتمي الى المستقيم (Δ).

(R) المستوي الذي يشمل A ويحوي على المستقيم (Δ) المستوي

(R) هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ نعم

(R) مستوي معرف بنقطة ومستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(1;-5;-3)$

نختار نقطة من المستقيم ولتكن $E(0;12;4)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{U}=0$ و $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AE}=0$ اذن $\overrightarrow{BC}$ ش نظ لـ المستوي (R)

$I(\frac{3}{2};2;\frac{-1}{2})$ منتصف $[BC]$ اي يبقى التأكد من ان $I\in(R)$ نحسب

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI}=0$ ومنه $I\in(R)$ ومنه (R) هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

ملاحظة يمكن ان نستعمل طرق اخرى للإثبات كأن تستعمل كتابة المعادلة بطريقة من الطرق.

المهم ان يكون I منتصف $[BC]$ ينتمي الى (R) و $\overrightarrow{BC}$ مرتبط خطيا مع الشعاع الناظمي لـ (R) ،،، او نحسب $BM=CM$ نجدها هي معادلة المستوي (R)

C هي نظيرة النقطة B بالتناظر المحوري بالنسبة للمستوي (R)

التمرين الثالث: لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\begin{cases} -x+x(\ln x+1) & \text{اذا كان } x>0 \\ 0 & \text{اذا كان } x=0 \end{cases}$$

1-حساب نهايات الدالة g عند $+\infty$ ع.ت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty+\infty$

ازالتها: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(-1+\ln x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$

2- اتجاه تغير الدالة g :

المشتق: g دالة ق.إ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=\ln x+1$

اشارة $g'(x)$: $x\in[e^{-1};+\infty[$ فان : $g'(x)\geq 0$

$x\in]-\infty:e^{-1}]$ فان : $g'(x)\leq 0$

اتجاه التغير: لما $x\in]-\infty:e^{-1}[$ فان g دالة متناقصة تماما

لما $x\in]e^{-1},+\infty[$ فان g دالة متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

3- $g(1)=0$ ومنه اشارة $g(x)$ هي :

$x\in]1;+\infty[$ فان : $g(x)>0$ ، $x\in]0;1[$ فان : $g(x)<0$

لما $x=1$ فإن $g(x)=0$.

II) لتكن الدالة المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{\ln x}{x}$ $D_f=]0;+\infty[$

1-حساب نهايات الدالة f على اطراف مجموعة التعريف ثم فسر هندسيا النتائج

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}+\frac{\ln x}{x}=1 \quad \text{لان} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x+1}{x}+\frac{\ln x}{x}=+\infty+\frac{-\infty}{0^+}=+\infty-\infty \text{ ع.ت}$$

ازالتها: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x}(x+1+\ln x)=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

$y=1$ م.م موازي لمحور الفواصل بجوار $+\infty$ و $x=0$ م م في جوار $-\infty$

تبيان انه من أجل كل قيم x من $\mathbb{R}$ ان: $f'(x)=\frac{1}{x}g(\frac{1}{x})$

بعد الحساب نجد: $f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}=\frac{1}{x}g(\frac{1}{x})$

3-استنتاج ان الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

ط1) ندرس اشارة $\frac{-\ln x}{x^2}$ فنتحصل على النتيجة مباشرة .

ط2) نستنتج من اشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن $\frac{1}{x}>0$ ، $x\in]1;+\infty[$ فان :

$g(x)>0$ أي $\frac{1}{x}\in]1;+\infty[$ أي $x\in]0;1[$ فان : $g(\frac{1}{x})>0$

و $x\in]0;1[$ فان : $g(x)<0$ أي $\frac{1}{x}\in]0;1[$

أي $x\in]1;+\infty[$ فان : $g(\frac{1}{x})<0$.ومنه : ان الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

4 - اشارة : $f(x)-1$:

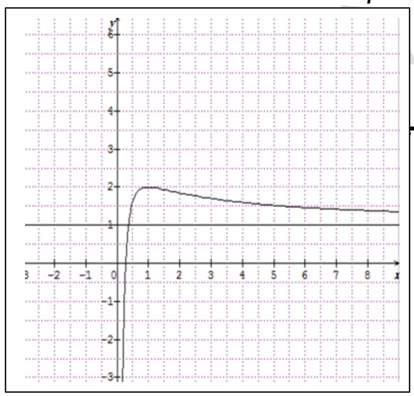
لما $x\in]e^{-1};+\infty[$ $f(x)-1>0$ أي (C_f) فوق المستقيم $y=1$

لما $x\in]0;+e^{-1}[$ $f(x)-1<0$ أي (C_f) تحت المستقيم $y=1$

لما $x=e^{-1}$ $f(x)-1=0$ أي (C_f) يقطع المستقيم $y=1$

5-معادلة المماس (T) عند $A(1;y)$: $(T):y=2$

7-المناقشة البيانية: ي m) x f n $e^{f(x)}=m$



لما $\ln m\in]-\infty;1]$

أي $m\in]0;e]$ حل وحيد موجب

لما $\ln m\in]1;2]$

أي $m\in]e;e^2]$ حلين مع

لما $\ln m=2$ أي $m=e^2$

حل مضاعف موجب

لما $\ln m\in]2;+\infty[$ أي $m\in]e^2;+\infty]$ لا يوجد حلول.