المؤسسة : المجمع المدرسي الخاص المعتمد – سليم –	السنة الدراسية : 2010/2009
المستوى : الثالثة ثانوي علوم تجريبية	المدة : 3 ساعات و نصف

تصحيح إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln(x)$

أ ـ دراسة تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty \end{cases}$ الدالة المشتقة $g'(x) = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$

ب) جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

جـ) حساب $g(1)$: $g(1) = -1 + 1 + 2\ln(1) = 0$

- إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$:

لما : $0 < x < 1 \leftarrow g(x) < 0$

لما : $x > 1 \leftarrow g(x) > 0$ و لما : $x = 1 \leftarrow g(1) = 0$

ب ـ استنتاج : لما : نقوم بتغيير المتغير : $x = \frac{1}{X} \leftarrow 0 < \frac{1}{X} < 1 \leftarrow 1 < X \leftarrow g(\frac{1}{X}) < 0$

نقوم بتغيير المتغير : $x = \frac{1}{X} \leftarrow \frac{1}{X} > 1 \leftarrow 1 > X > 0 \leftarrow g(\frac{1}{X}) > 0$

الجزء الثاني :

الدالة f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln x \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين . علما أن : $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x) = 0$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x - x^2\ln x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x(1 - x\ln x)) = 0(1-0) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ و منه f دالة مستمرة على اليمين 0

2) دارسة قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين .

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x-x^2\ln x)-0}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x-x^2\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(1-x\ln x)}{x} \\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}(1-x\ln x) = 1 \end{cases}$

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين النقطة 0 .

- التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟ نقول أن المنحنى يقبل نصف مماس على اليمين النقطة 0 ميله 1

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim(x - x^2\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(1 - x\ln x) = -\infty \end{cases}$

4) أ ـ تبيان أن : $f'(x) = x.g\left(\frac{1}{x}\right)$ مهما يكن $x \in]0;+\infty[$

$\begin{cases} f'(x) = (x)' - (x^2\ln x)' = 1 - \left[(2x)\times\ln x + (x^2)\times(\frac{1}{x})\right] \\ f'(x) = 1 - [(2x)\times\ln x + x] = 1 - x - 2x\ln x = \\ f'(x) = 1 - x + 2x\ln x = x(\frac{1}{x} - 1 - 2\ln x) = x(\frac{1}{x} - 1 + 2\ln\frac{1}{x}) \\ f'(x) = x.g(\frac{1}{x}) \end{cases}$

ب ـ جدول تغيرات الدالة f . : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ على المجال $]0,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	1	↘ $-\infty$

5) تبيان أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $1 < \alpha < 2$.

- الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $]0,+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]1;2[$
- الدالة f رتيبة (متزايدة تماماً) على المجال $]1;2[$
- و أن : $f(1)\times f(2) < 0$ مع : $f(1) = 1 > 0$ و $f(2) = -0{,}77 < 0$

و منه حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α المجال $]1;2[$

6) أ ـ التحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y = x$.

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

معادلة المماس : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1.(x-0) + 0$

$y = x$

ب ـ تبيان انه لما $x \in]0,1[$ فإن $f(x) > x$

نعلم أنه لما : $1 > x > 0 \leftarrow Ln(x) < 0 \leftarrow x^2.Ln(x) < 0$

$1 > x > 0 \leftarrow -x^2.Ln(x) > 0$

$1 > x > 0 \leftarrow x - x^2.Ln(x) > x$

و منه $1 > x > 0 \leftarrow f(x) > x$

ج ـ الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T)

لدينا ما سبق $1 > x > 0 \leftarrow f(x) > x$ أي : $f(x) - x > 0$

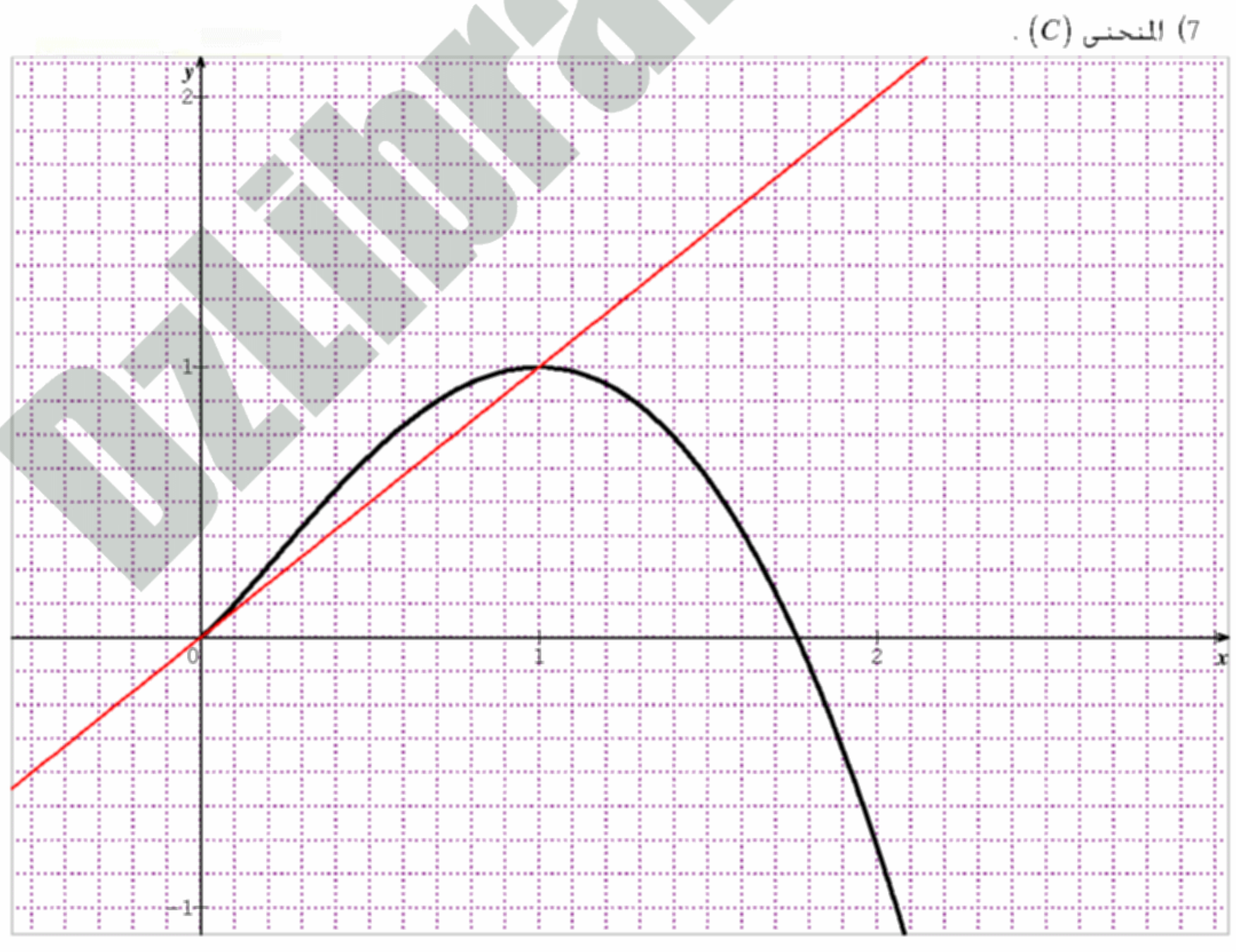
و من جهة : $x > 1 \leftarrow Ln(x) > 0 \leftarrow x^2.Ln(x) > 0$

$x > 1 \leftarrow -x^2.Ln(x) < 0$

$x > 1 \leftarrow f(x) - x < 0$ و منه نستنتج أن المنحنى (C) فوق المماس (T)

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	−
الوضع النسبي	(C) فوق (T)	(C) يقطع (T)	(C) تحت (T)

7) المنحنى (C) .



التمرين الثاني

$(\Delta) : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases}$ $\qquad (\Delta') : \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 5 + \alpha \end{cases}$

1. تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوى .

$\vec{u_1}\begin{pmatrix} +1 \\ +\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\vec{u_2}\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ +1 \end{pmatrix}$. $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{+1/2}$ $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا .

لحل الجملة $\begin{cases} 6 + \alpha = 3 + \lambda \\ 5 + \alpha = -2 - 2\lambda \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} \lambda = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-13}{3} \end{cases}$

النقطة من (Δ_1) من أجل $\lambda = \frac{-4}{3}$ هي $(\frac{5}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3})$ و النقطة من (Δ_2) من أجل $\alpha = \frac{-13}{3}$ هي $(\frac{5}{3};\frac{29}{3};\frac{2}{3})$

إذن المستقيمان (Δ_1) و (Δ_1) ليسا من نفس المستوي .

2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .

- تعيين إحداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عمودياً على كل من (Δ) و (Δ')

شعاع توجيه المستقيم (AB) هو الشعاع $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$. $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 + \alpha - \lambda \\ -1 - 2\alpha - \lambda \\ 7 + \alpha + 2\lambda \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} \vec{u_1}.\vec{AB} = 0 \quad \rightarrow (3+\alpha-\lambda)(1) + (-1-2\alpha-\lambda)(1) + (7+\alpha+2\lambda)(-2) = 0 \\ \vec{u_2}.\vec{AB} = 0 \quad \rightarrow (3+\alpha-\lambda)(1) + (-1-2\alpha-\lambda)(-2) + (7+\alpha+2\lambda)(1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{u_1}.\vec{AB} = 0 \quad \rightarrow \alpha + 2\lambda + 4 = 0 \\ \vec{u_2}.\vec{AB} = 0 \quad \rightarrow 2\alpha + \lambda + 4 = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-4}{3} \end{cases} \leftarrow B(\frac{14}{3},\frac{11}{3},\frac{11}{3}) \quad ; \quad A(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

- حساب الطول AB : $AB = \sqrt{(\frac{14}{3}-\frac{5}{3})^2 + (\frac{11}{3}-\frac{2}{3})^2 + (\frac{11}{3}-\frac{2}{3})^2} = 3\sqrt{3}.$

3. عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

أي المستوي الذي شعاعه الناظمي يكون موازياً لـ $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ و يشمل النقطة $A(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ مثلاً

أي : $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$ $\quad (P)/: 3(x-\frac{5}{3}) + 3(x-\frac{2}{3}) + 3(x-\frac{2}{3}) = 0 \quad / \quad (P)/: x + y + z - 3 = 0$

4. حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ؟

$$d(N;(P)) = \frac{|(6+\alpha) + (1-2\alpha) + (5+\alpha) - 3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

نلاحظ أنها تبقى ثابتة و مساوي لـ الطول AB

التمرين الثالث

1. تحديد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي . $z' = z^2 - 4z$

1. $z_A = 1 - i \rightarrow z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = -2i - 4 + 4i = -4 + 2i$
2. $z_B = 3 + i \rightarrow z_{B'} = 9 + 6i - 1 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

2. أ ـ تبيان أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان : $z^2 - 3z + 3 = 0$.

$OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان : $\vec{OM} = \vec{M'C}$. أو الأقطار متناصفة

أي : $z - 0 = -3 - z'$. و منه $z = -3 - z^2 - 4z$. و بالتالي : $z^2 - 3z + 3 = 0$

ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 3z + 3 = 0$.

$z^2 - 3z + 3 = 0$ المميز $\Delta = 9 - 12 = -3 = 3i^2$ و منه نجد : $z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. أ ـ عبر عن : $z' + 4$ بدلالة $z - 2$. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

ب ـ استنتاج أن : $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

$(z'+4) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |z'+4| = |z-2|^2 \\ \arg(z'+4) = 2\arg(z-2) + 2k\pi \end{cases}$

ج ـ تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و نصف قطرها .

. إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 . هذا يعني : $|z - z_D| = 2$.

أي : $|z - 2| = 2$. بتربيع الطرفين : $|z - 2|^2 = 2^2 = 4$. أي : $|z' - 4| = 4$.

و منه فإن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة H(4 ,0) و نصف قطرها 4.