تصحيح الفرض الأول للفصل الثاني

التمرين الأول:

I. إيجاد a و b :

نعلم أن $\sum_{i=1}^{5} P_i = 1$ أي: $0.25+a+b+0.05+0.25=1$

و منه : $a+b=0.45$..........(1)

وكذلك $E(X)=0$ أي:

$$(-4\times 0.25)+(-3\times a)+(b\times 1)+(3\times 0.05)+(4\times 0.25)=0$$

$-3a+b=-0.15$..........(2)

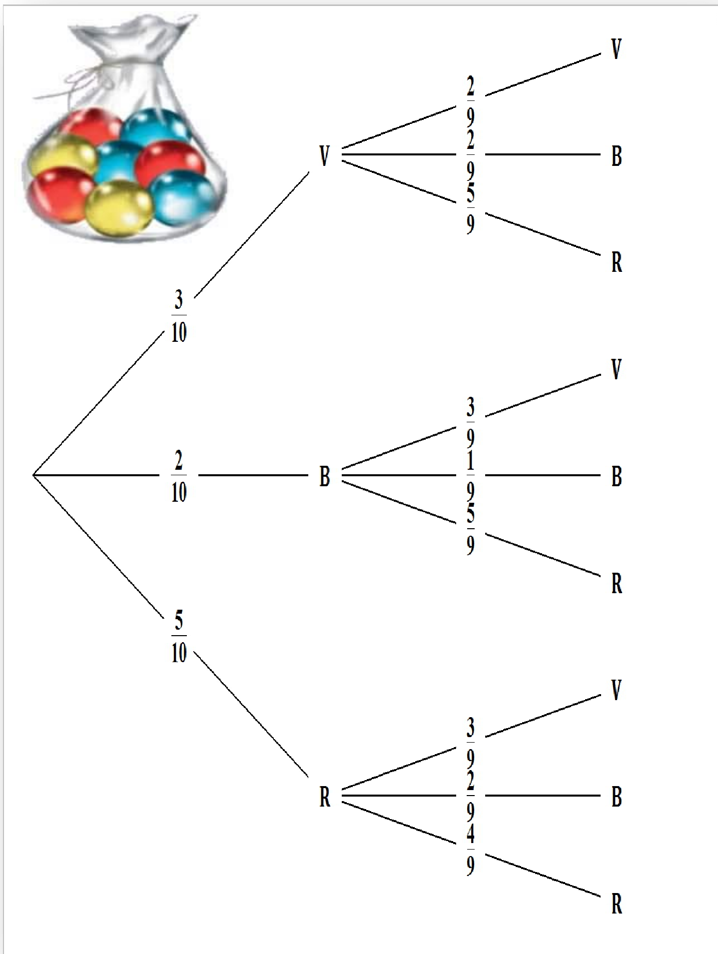
من (1) و(2) نجد: $a=0.15$ و $b=0.30$

II.

شجرة الاحتمالات: نرمز بـ:

B للكرة البيضاء ، V للكرة الخضراء ، R للكرة الحمراء.

1) شجرة الاحتمالات :



2) حساب احتمال:

أ) A "كرتين من نفس اللون"

الحدث A هو : VV أو BB أو RR :

$$P(A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\boxed{\frac{28}{90}}$$

ب) B "كرة خضراء في السحب الأول"

الحدث B هو : VV أو VB أو VR :

$$P(B)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}=\boxed{\frac{27}{90}}$$

3) أ) تعيين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و تعريف قانون احتماله.

المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين بيضاء إذن ممكن أن نسحب كرتين أو كرة واحدة أو لا نسحب أي كرة بيضاء.

أ) القيم التي يأخذها X هي : $0،1،2$

قانون احتمال X لدينا:

$$P(X=0)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\boxed{\frac{56}{90}}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{2}{9}=\boxed{\frac{32}{90}}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\boxed{\frac{2}{90}}$$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{2}{90}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي $\sigma(X)$

$$E(X)=0\times\frac{56}{90}+1\times\frac{32}{90}+2\times\frac{2}{90}$$

$E(X)=0.4$

الانحراف المعياري:

أولا نحسب التباين $V(X)$:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-E(X)\right)^2 p_i$$

$$V(X)=(0-0.4)^2\frac{56}{90}+(1-0.4)^2\frac{32}{90}+(2-0.4)^2\frac{2}{90}$$

$$V(X)\simeq 0.284$$

إذن الانحراف المعياري هو :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{0.284}=0.53$$

$$\sigma(X)\simeq 0.53$$

التمرين الثاني:

مجموعة تعريف الدالة f: $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

1. حساب النهايات:

- نهايات الدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

- نهايات الدالة f عند 1 بقيم أكبر و أصغر منه :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

- التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب معادلته $x=1$.

2. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

$$f(x)=x-1+\frac{4}{x-1}$$

$$x-1+\frac{4}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)+4}{x-1}=\frac{x^2-2x+1+4}{x-1}=\frac{x^2-2x+5}{x-1}=f(x)$$

3. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-1\times(x^2-2x+5)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-5}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:**

إشارة $f'(x)$ من نفس اشارة البسط x^2-2x-3

ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta=16$ يقبل جذرين $x'=3$ و $x''=-1$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty,-1]$ و $[3,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $]1,3]$ و $[-1,1[$.

- **جدول التغيرات**

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

4. إثبات أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0$$

ومنه المستقيم (D) مقارب مائل لـ (C_f).

- **دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D):**

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-(x-1)=\dfrac{4}{x-1}$

إشارة الفرق من إشارة $x-1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	-	||	+
	(C_f) تحت (D)		(C_f) فوق (D)

5. تبيين أن $f(2-x)+f(x)=0$

$$f(2-x)=2-x-1+\frac{4}{2-x-1}=-x+1+\frac{4}{-x+1}=-x+1-\frac{4}{x-1}$$

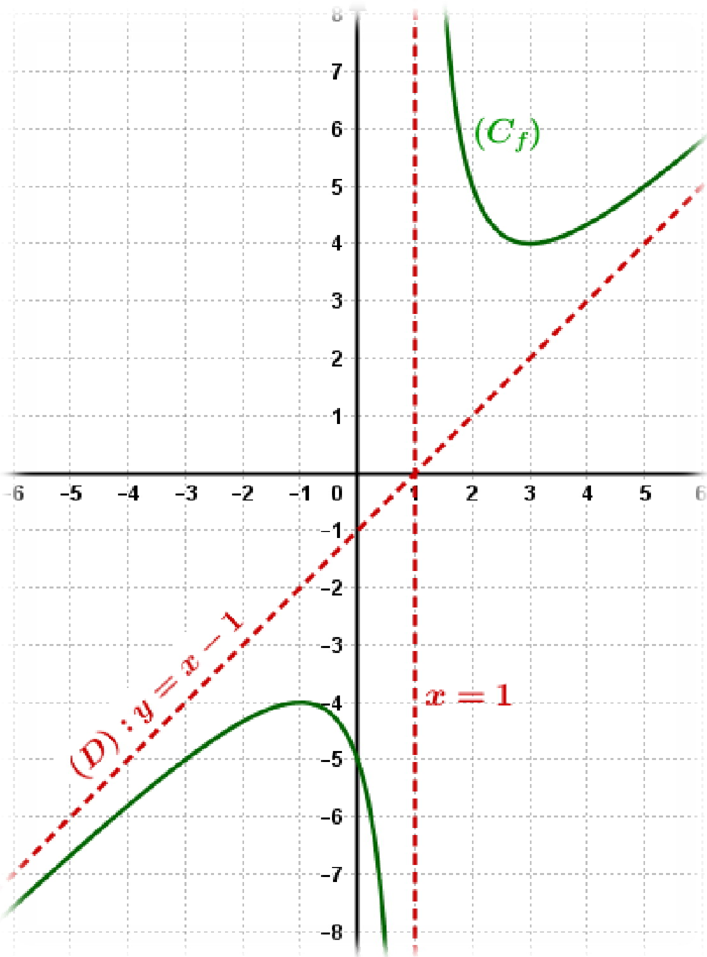
$$f(2-x)+f(x)=-x+1-\frac{4}{x-1}+x-1+\frac{4}{x-1}=0$$

نلاحظ أن :

$$f(2(a)-x)+f(x)=2\times b$$
$$f(2(1)-x)+f(x)=2\times 0$$

ومنه نستنتج أن النقطة $\Omega(1;0)$ مركز تناظر المنحنى (C_f).

6. إنشاء (D) و (C_f)



تم بحمد الله وفضله