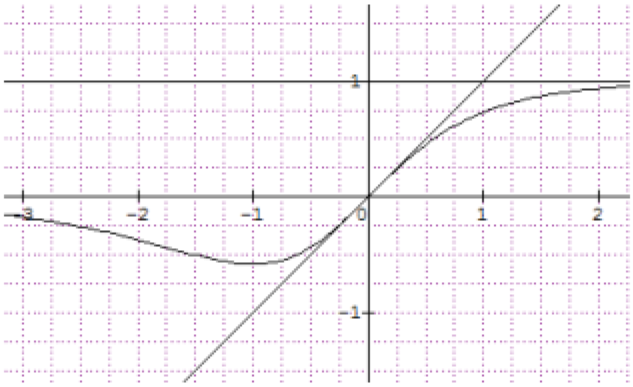
التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل	العلامة
التمرين 1 التمرين2	**I)** $g(x)=e^{-x}+x-1$ 1 / دارسة اتجاه تغيرات الدالة g. g دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ودالتها المشتقة: $g'(x)=-e^{-x}+1$ $g'(x)<0$ من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ومنه g متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ $g'(x)>0$ من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ 2 / $g(0)=0$ ومنه: $g(x)\geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ **II)** 1 / أ / $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$ 1/ب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ إذن تمثيل الدالة f يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما $y=0$ و $y=1$. 2/أ/ $f'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^{2}}$	

4/ إنشاء (Δ) و (C_f)



/5

المناقشة البيانية: المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$\frac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$ تكافئ: $f(x)=m+1$.

إذا كان $m\in]-\infty;f(-1)-1[\cup[0;+\infty[$ ليس للمعادلة حل.

إذا كان $m=\frac{2-e}{e-1}$ للمعادلة حل مضاعف -1

إذا كان $m\in]f(-1)-1;-1[$ للمعادلة حلان سالبان.

إذا كان $m\in[-1;0[$ للمعادلة حل موجب.

I) الدالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-1+2\ln x$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)=1+\dfrac{2}{x}$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)>0$، و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) $g(1)=1-1+2\ln 1=0$.

إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-2+(\ln x)^2-\ln x$.

1) أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\ln x\left(-1+\ln x\right)\right)=+\infty$.

ب. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-2+\ln x\left(-1+\ln x\right)\right)=+\infty$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

2) أ. تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن:

$$f'(x)=1+\frac{2}{x}\ln x-\frac{1}{x}=\frac{x-1+2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$، و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ب. جدول تغيرات الدالة f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3) تبيان أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $2,1<\beta<2,2$

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ و $]0.4;0.5[\subset]0;1]$ و $\begin{cases} f(0.4)\approx 0{,}15 \\ f(0.5)\approx -0{,}32 \end{cases}$ أي $f(0.4)\times f(0.5)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1]$ حلا وحيدا α، حيث $0{,}4<\alpha<0{,}5$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $]2.1;2.2[\subset[1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(2.1)\approx -0{,}09 \\ f(2.2)\approx 0{,}03 \end{cases}$ أي $f(2.1)\times f(2.2)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $[1;+\infty[$ حلا وحيدا β، حيث $2{,}1<\beta<2{,}2$.

4) أـ حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $(\ln x)^2-\ln x-2=0$.

$(\ln x)^2-\ln x-2=0$ تكافئ $(1+\ln x)(\ln x-2)=0$ تكافئ $\begin{cases}\ln x=-1\\ \ln x=2\end{cases}$ أو أي: $\begin{cases} x=e^{-1}=\frac{1}{e} \\ \ln x=e^2 \end{cases}$ أو .

بـ نستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ في النقطتين $B(e^{-1};e^{-1})$ و $C(e^2;e^2)$.

جـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x)-x=(\ln x)^2-\ln x-2$ و منه إشارة الفرق من إشارة: $(\ln x)^2-\ln x-2$.

x	0		e^{-1}		e^2		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لما $x\in\left]0;\frac{1}{e}\right[$، المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ) .

لما $x\in\left]e^2;+\infty\right[$، المنحنى (C_f) تحت المستقيم (Δ) .

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطتين $B(e^{-1};e^{-1})$ و $C(e^2;e^2)$.

5) تعيين إحداثيي النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ):

نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f'(x)=1$.

$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{g(x)}{x}=1$ تكافئ $g(x)=x$ تكافئ $-1+2\ln x=0$ تكافئ $\ln x=\frac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}$.

ومنه مماس المنحنى (C_f) في النقطة $A\left(\sqrt{e};\sqrt{e}-\frac{9}{4}\right)$ موازي للمستقيم (Δ) .

كتابة معادلة للمماس (T) :

لدينا : $(T): y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ ومنه $(T): y=x-\frac{9}{4}$.

6) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن :

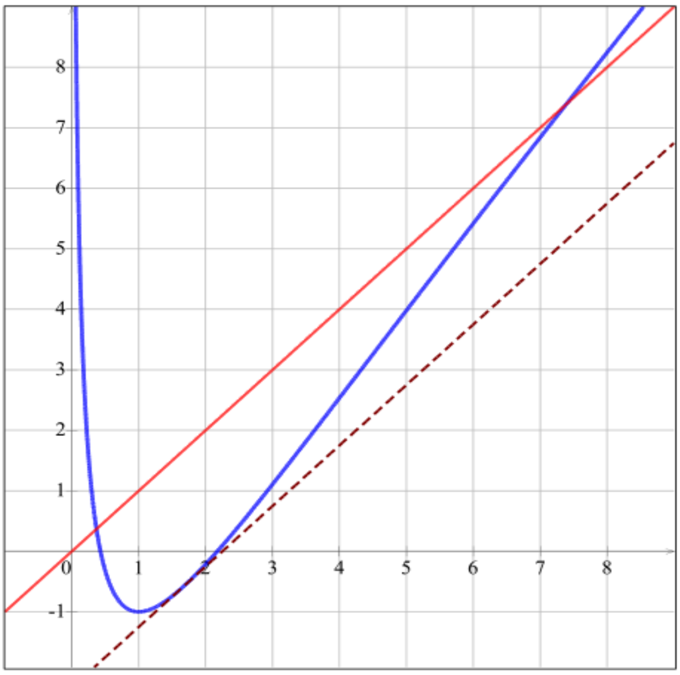
$$f''(x)==\frac{g'(x)\times x-g(x)}{x^2}=\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\times x-(x-1+2\ln x)}{x^2}=\frac{3-2\ln x}{x^2}$$

إشارة $f''(x)$:

x	0 $\quad\quad$ $\sqrt{e^3}$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف هي $\omega\left(\sqrt{e^3};\sqrt{e^3}-\frac{5}{4}\right)$.

7) الرسم :



8) المناقشة البيانية :

المعادلة $\left(\ln x\right)^2-\ln x+m-2=0$ تكافئ $f\left(x\right)=x-m$.

حلول المعادلة $f\left(x\right)=x-m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيم $\left(d_m\right)$ ذو المعادلة $y=x-m$.

إذا كان $m=\frac{9}{4}$ المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان $m\in\left]\frac{9}{4};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m\in\left]-\infty;\frac{9}{4}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .