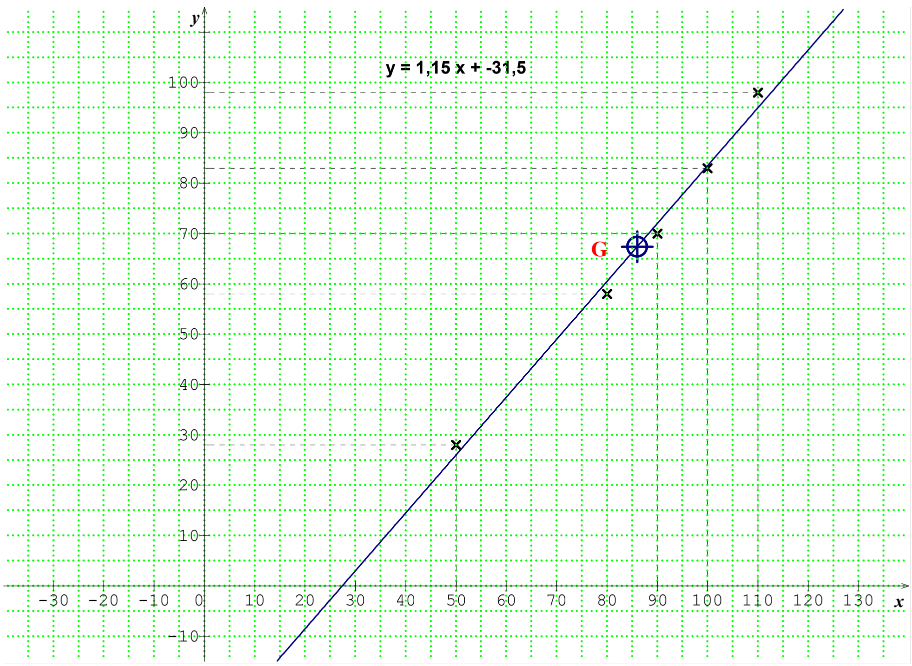
التصحيح	التنقيط
التمرين الأول :	08 نقاط
لدينا : $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$	
I. تعين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة : (u_n) متتالية ثابتة يعني $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$ إذن $\frac{1}{2}\alpha-2=\alpha$ ومنه $-2=\alpha-\frac{1}{2}\alpha$ أي $\frac{1}{2}\alpha=-2$ وبالتالي : $\alpha=-4$	0.75
II. نفرض $\alpha=3$: **1) حساب الحدود u_3,u_2,u_1:** • $u_1=\frac{1}{2}u_0-2=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$ • $u_2=\frac{1}{2}u_1-2=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{9}{4}$ • $u_3=\frac{1}{2}u_2-2=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{9}{4}\right)-2=-\frac{25}{8}$	3×0.5
• **تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n):** نلاحظ أنَ $u_0>u_1>u_2>u_3$ ومنه (u_n) متتالية متناقصة .	0.25
2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>-4$: • نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=3$ و $3>-4$ أي $u_0>-4$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$ 2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ $u_n>-4$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>-4$ لدينا : $u_n>-4$ ومنه $\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{2}(-4)$ وبالتالي $\frac{1}{2}u_n-2>\frac{1}{2}(-4)-2$ أي $u_{n+1}>-4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنَ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n	01
3) دراسة تقارب المتتالية (u_n) : - (u_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -4 فإنها متقاربة وتتقارب من العدد -4 . - أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-4$	0.25
4) لدينا : $v_n=u_n+4$ **ب) البرهان أنَ (v_n) هندسية :** • لدينا : $v_n=u_n+4$ ومنه $u_n=v_n-4$ • ولدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{1}{2}u_n-2+4=\frac{1}{2}(v_n-4)+2$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ وبالتالي (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=u_0+4=3+4=7$	0.75 + $0.25+0.25$

ب) حساب عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.5
ج) استنتاج أنَ $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : • لدينا : $u_n = v_n - 4$ إذن $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$ • حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\right) = -4$ لأنَ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ حيث $-1 < \frac{1}{2} < 1$	0.5 0.5
د) حساب المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 3 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$ أي $S_n = 6\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.5
• استنتاج المجموع S'_n : $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = v_0 - 4 + v_1 - 4 + \ldots + v_n - 4$ ومنه $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n - 4(n+1) = S_n - 4n - 4$ $S'_n = 6 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4n - 4 = 2 - 4n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$	01
التمرين الثاني :	06 نقاط
1) أ) تمثيل سحابة النقط : 	01.5

01	ب) حساب إحداثيي النقطة G : • لدينا : $x_G = \frac{50+80+90+100+110}{5} = 86$ و $y_G = \frac{28+58+70+83+98}{5} = 67.4$ $G(86;67.4)$ • تعليم النقطة G
02.5	2) تبيان أنَ معادلة مستقيم الانحدار (D) هي $y = 1.15x - 31.5$: • لدينا : $a = \frac{\text{cov}(x;y)}{v(x)}$

x_i	50	80	90	100	110
y_i	28	58	70	83	98
$x_i - \bar{x}$	- 36	- 6	4	14	24
$y_i - \bar{y}$	- 39.4	- 9.4	2.6	15.6	30.6
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	1418.4	56.4	10.4	218.4	734.4
$(x_i - \bar{x})^2$	1296	36	16	196	576

إذن : $a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{5}\times 2438}{\frac{1}{5}\times 2120} = 1.15$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 67.4 - 1.15\times 86 = -31.5$ لأنَ $G \in (D)$

وبالتالي معادلة مستقيم الانحدار (D) : $y = 1.15x - 31.5$

• رسم المستقيم الانحدار

01	3) حساب مسافة التوقف لسيارة تسير بسرعة $200km/h$: $y = 1.15\times 200 - 31.5 = 198.5m$
06 نقاط	**التمرين الثالث**
	• لدينا : $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2}$ و $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
02	1) تعيين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون ، $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2}$: • لدينا : $f(x) = \frac{x^2}{x^2} + \frac{2x+3}{x^2} = 1 + \frac{2x+3}{x^2}$ ومنه : $a = 1, b = 2$ و $c = 3$
03	2) حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف : • $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ • $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{<}0} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2}\right) = +\infty$ لأنَ $\begin{cases} \lim_{x\xrightarrow{<}0} (x^2+2x+3) = 3 \\ \lim_{x\xrightarrow{<}0} x^2 = 0^+ \end{cases}$ • $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}0} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2}\right) = +\infty$ لأنَ $\begin{cases} \lim_{x\xrightarrow{>}0} (x^2+2x+3) = 3 \\ \lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2 = 0^+ \end{cases}$ • $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

• **التفسير الهندسي للنتائج :** - $y=1$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. - $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني $\left(C_f\right)$	01

✌ بالتوفيق في البكالوريا جوان 2015 ❀