التصحيح النموذجي للفرض الاول 3عت

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ دارسة تغيرات الدالة g

- النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

- الدلة المشتقة : g دالة قابلة للاشتقاق على R: $g'(x) = 3x^2 - 3$
- إشارة الدالة المشتقة :

$3x^2 - 3 = 0$

نجد : $x = 1$ او $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-8	↗	$+\infty$

2/ اثبات ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث 2≤α≤2.25

- من جدول التغيرات مستمرة ورتيبة على المجال[2 ; 2.25]
- لدينا : $g(2) = -2$ و $g(2.25) = 0.64$ ومنه فان : $g(2).g(2.25) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث 2≤α≤2.25

3/ استنتاج اشارة $g(x)$

من جدول التغيرات لدينا :

$x \in]-\infty; \alpha[$ لدينا : $g(x) \leq 0$

$x = \alpha$ لدينا : $g(x) = 0$

$x \in]\alpha; +\infty[$ لدينا : $g(x) \geq 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$

1/ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{\to}{<} -1} f(x) = \lim_{x \underset{\to}{<} -1} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{\to}{>} -1} f(x) = \lim_{x \underset{\to}{<} -1} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \underset{\to}{<} 1} f(x) = \lim_{x \underset{\to}{<} -1} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \underset{\to}{>} -1} f(x) = \lim_{x \underset{\to}{<} -1} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

$x=-1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$x=1$ **مستقيم مقارب عمودي** لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

2/ الدالة المشتقة

f دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{-1,1\}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2-1) - 2x(x^3+x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^4-3x^2+2x^3-2x^2-(2x^4-2x^3-2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3/ دارسة تغيرات الدالة f

- **إشارة الدالة المشتقة :**

لدينا :

$(x^2-1)^2 > 0$

ومنه إشارة f' من اشارة $xg(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$		$+$	

- **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$x€]-\infty;-1[U]-1;0]U[\alpha;+\infty[$

f *متزايدة*

$x€[0;1[U]1;\alpha]$

f متناقصة

4/ اثبات ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}-(x+1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1-(x+1)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5/ دراسة الوضع النسبي بين C_f و (Δ)

دراسة اشارة المقدار $f(x)-y$

$$f(x)-y = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}-(x+1) = \frac{x^3+x^2+1-(x+1)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x-2}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
x^2-1		$+$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
الوضع النسبي		C_f تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ)	C_f فوق (Δ)	‖	C_f تحت (Δ)	‖	C_f فوق (Δ)	

$x+2=0$

$x=-2$

$x^2-1=0 \qquad x^2=1$

$x=1$ او $x=-1$

6/ اثبات ان $f(\alpha)=1+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$

$$g(\alpha)=0$$

$$\alpha^3-3\alpha-4=0$$

$$\alpha^3=3\alpha+4$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$

$$=\frac{3\alpha+4+\alpha^2+1}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^2+3\alpha+5}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^2-1+1+3\alpha+5}{\alpha^2-1}$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}=1+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

استنتاج حصر لـ : $f(\alpha)$

لدينا : $2 \le \alpha \le 2.25$

باضرب في 3 و اضافة 6 الى جميع الاطراف نجد : ...... (1) $\boxed{12 \le 3\alpha + 6 \le 12.75}$

لدينا : $2 \le \alpha \le 2.25$

بتربيع اطراف المتراجحة ثم اضافة -1 الى جميع الاطراف نجد : $3 \le \alpha^2 - 1 \le 4.06$

بقلب اطراف المتراجحة نجد ...... (2) $\boxed{\frac{1}{4.06} \le \frac{1}{\alpha^2 - 1} \le \frac{1}{3}}$

بضرب اطراف المتراجحة (1) في اطراف المتراجحة (2) نجد :

$$\frac{12}{4.06} \le \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} \le \frac{12.75}{3}$$

نضيف 1 الى جميع الاطراف نجد :

$$3.95 \le \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} + 6 \le 5.25$$

ومنه :

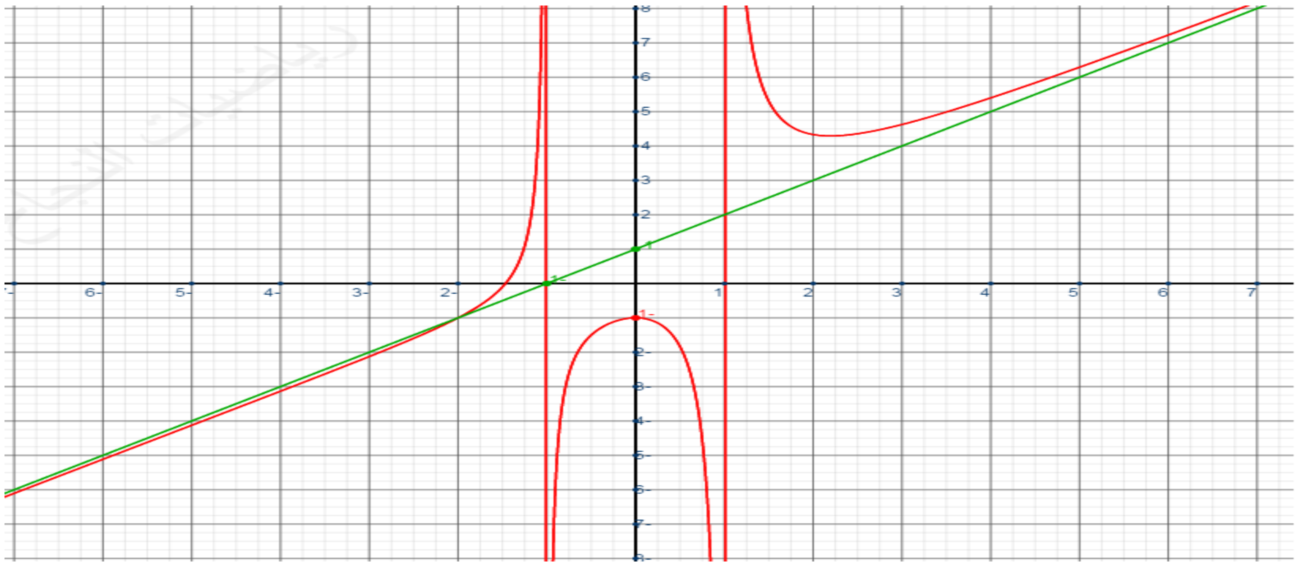
$$3.95 \le f(\alpha) \le 5.25$$

/7 اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α‘ حيث -1.5≤α’≤-1.25

- من جدول التغيرات f مستمرة ورتيبة على المجال $[-1.5; -1.25]$
- لدينا : $f(-1.25) = \cdots$ و $f(-1.5) = \cdots$ ومنه فان : $f(-1.25).f(-1.5) \le 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α‘ حيث -1.5≤α’≤-1.25

/8 رسم C_f و (Δ)



k دالة معرفة على $R-\{\alpha'\}$ بـ: $k(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

9/ دراسة تغيرات الدالة k

- <u>النهايات:</u>

$$\lim_{x\to-\infty} k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to\alpha'\\ x<}} k(x)=\lim_{\substack{x\to\alpha'\\ x<}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\alpha'\\ x>}} k(x)=\lim_{\substack{x\to\alpha'\\ x>}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

- <u>الدلة المشتقة</u> : k دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{\alpha'\}$:

$$k'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

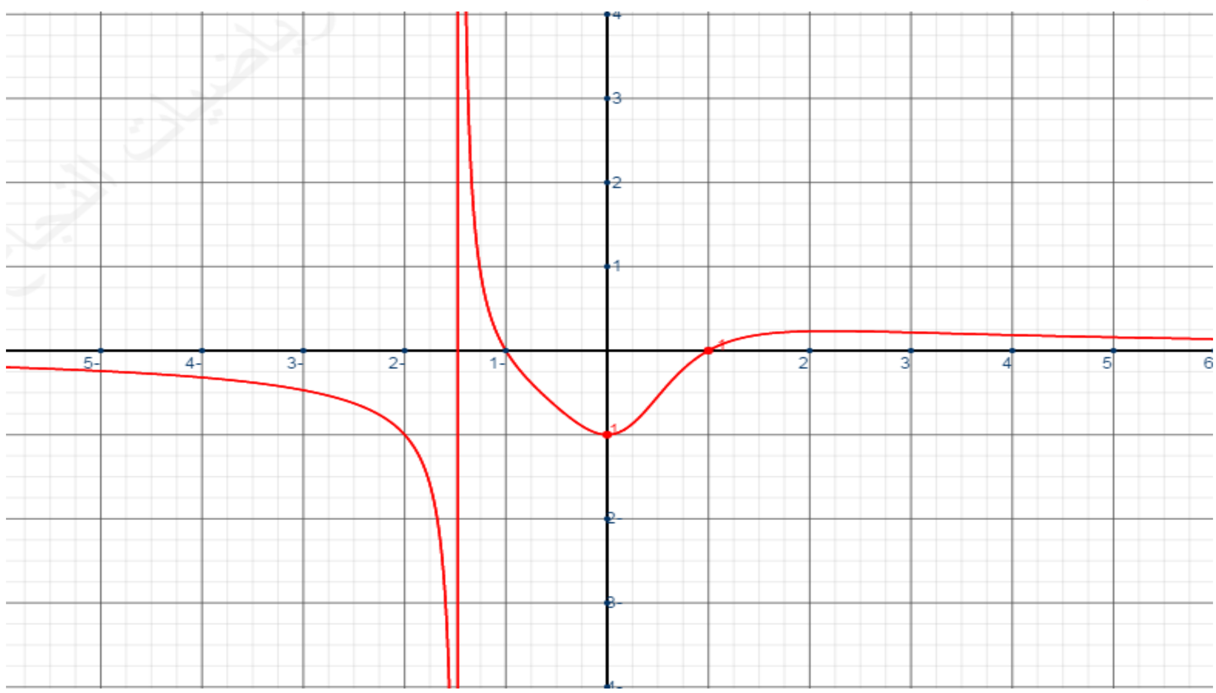
- <u>جدول التغيرات :</u>

$$(f(x))^2>0$$

ومنه اشارة k' من اشارة $-f'(x)$

x	$-\infty$		α'		0		α		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$k(x)$	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1	↗	$k(\alpha)$	↘	0

رسم C_k



h دالة معرفة على $R-\{-2\,,0\}$: بـ : $h(x)=f\left((x+1)^2\right)$

10/ دراسة تغيرات h

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left((x+1)^2\right) = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left((x+1)^2\right) = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to-2^-} h(x) = \lim_{x\to-2^-} f\left((x+1)^2\right) = \lim_{y\to1^+} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to-2^+} h(x) = \lim_{x\to-2^+} f\left((x+1)^2\right) = \lim_{y\to1^-} \mathrm{f(y)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} f\left((x+1)^2\right) = \lim_{y\to1^-} \mathrm{f(y)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} f\left((x+1)^2\right) = \lim_{y\to1^+} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

الدالة المشتقة : h دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{-2\,,0\}$

$$h'(x)=(2x+2)\,f'\left((x+1)^2\right)$$

اشارة الدالة المشتقة :

$2x+2=0$ يكافئ $x=-1$

$f'\left((x+1)^2\right)=0$ يكافئ : $(x+1)^2=0$ او $(x+1)^2=0$

يكافئ : $x=0$ او $x=-\sqrt{\alpha}-1$ او $x=\sqrt{\alpha}-1$

$f'\left((x+1)^2\right)\le 0$ يكافئ : $0\le(x+1)^2\le\alpha$ يكافئ: $-\sqrt{\alpha}-1\le x\le\sqrt{\alpha}-1$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}-1$		-2		-1		0		$-\sqrt{\alpha}-1$		$+\infty$
$2x+2$		-	|	-	‖	-	|	+	‖	+	|	+	
$f'(x+1)^2$		+	0	-	‖	-	0	-	‖	+	0	+	
$h'(x)$		-	0	+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
$h(x)$	$-\infty$	↘	$h(-\sqrt{\alpha}-1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$h(-\sqrt{\alpha}-1)$	↗	$+\infty$

11/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = |m-1|$

نضع $m-1=k$ تصبح المعادلة : $f(x)=|k|$

$|k|\in[0;f(\alpha)[$: أي $k\in]-f(\alpha);f(\alpha)[$ المعادلة $|m-1|$ $f(x) =$ تقبل حل وحيد

$|k| = f(\alpha)$ اي $k=-f(\alpha)$ او $k=f(\alpha)$ المعادلة $|m-1|$ $f(x) =$ تقبل حلان

$|k|\in]f(\alpha);+\infty[$: أي $k\in]-\infty;-f(\alpha)[\cup]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة $|m-1|$ $f(x) =$ تقبل 3 حلول

المناقشة حسب قيم m لدينا : $m=k+1$

$m\in]-f(\alpha)+1;f(\alpha)+1[$ المعادلة $|m-1|$ $f(x) =$ تقبل حل وحيد

$m=-f(\alpha)+1$ او $m=f(\alpha)+1$ المعادلة $|m-1|$ $f(x) =$ تقبل حلان

$m\in]-\infty;-f(\alpha)+1[\cup]f(\alpha)+1;+\infty[$ المعادلة $|m-1|$ $f(x) =$ تقبل 3 حلول

12/ مناقشة حلول المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$

المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تكافئ المعادلة : $\frac{1}{f(cos(\theta))} = m$ تكافئ : $k(cos(\theta)) = m$

نناقش بيانيا مع منحنى الدالة k وناخذ فقط الحلول المحصورة بين -1 و1 لان $-1\leq cos(\theta)\leq 1$

$m\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ لا تقبل حلول

$m=-1$ المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تقبل حل وحيد اذا كان المجهول $cos(\theta)$ وتقبل حلان اذا كان المجهول θ

$m\in]-1;0[$ المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تقبل حلان اذا كان المجهول $cos(\theta)$ وتقبل 4 حلول اذا كان المجهول θ

$m=0$ المعادلة $f(cos(P)) = \frac{1}{m}$ تقبل حلان

13/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$

نضع $\sin(\theta) = t$ تصبح المعادلة $f(x) = t$

من اجل $\theta = \frac{3\pi}{2}$ فان $t=-1$ المعادلة $f(x)=\sin(\theta)$ تقبل حلان

$\theta\in[0;\frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2};2\pi]$ فان : $-1\leq t\leq 1$ المعادلة $f(x)=\sin(\theta)$ لا تقبل حلول