2018 / 2017

الثالثة علوم تجريبية

تصحيح اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

سؤال1	سؤال2	سؤال3
أ	جـ	ب

التبرير:

1) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(1+x)\in\mathbb{R}-\{1\}$ فإن: $(1-x)\in\mathbb{R}-\{1\}$ ، نبين أن: $f(1+x)=f(1-x)$

$$f(1-x)=(1-x)^2+2(1-x)-\ln(1-x-1)^2$$
$$=1-2x+x^2-2+2x-\ln x^2=x^2-1-\ln x^2..........(1)$$
$$f(1+x)=(1+x)^2-2(1+x)-\ln(1+x-1)^2=x^2-1-\ln x^2...(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$h'(x)=[f(3x)]'=3f'(3x)=3\left(\frac{1}{(3x)^2+3}\right)=\frac{1}{3x^2+1}$$

3) $y'+6y-2=0$ تكافئ $y'=-6y+2$ ، حلول المعادلة التفاضلية $y'=-6y+2$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث $y=ce^{-6x}+\frac{1}{3}$ مع c ثابت حقيقي.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} ce^{-6x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$:

التمرين الثاني:

I) $f(x)=x+1+e^{\frac{1}{x+1}}$ ، $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$

1/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	$e+1$

2/ $g(x)=-x+1+e^{\frac{1}{x+1}}$ ، $D_g=[0;+\infty[$

أ) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+e^{\frac{1}{x+1}}\right)=-\infty$

ب) نبين أن المستقيم ذي المعادلة $y=-x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$: لدينا:

$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-x+2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+e^{\frac{1}{x+1}}\right)=0$ ومنه

جـ) دراسة تغيرات الدالة g :

دراسة اتجاه تغير الدالة g على $[0;+\infty[$: g تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة g' : $g'(x)=-\left(1+\frac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$1+e$	↘	$-\infty$

II) $k(x)=-|x|+1+e^{\frac{1}{x+1}}$ ، $D_k=\mathbb{R}-\{-1\}$.

1/ أ) حساب $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{-h+1+e^{\frac{1}{h+1}}-1-e}{h}$$
$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\left(-1+\frac{e^{\frac{1}{h+1}}-e}{h}\right)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\left(-1+\frac{e\left(e^{-1}e^{\frac{1}{h+1}}-1\right)}{h}\right)$$
$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\left(-1+\left(\frac{e^{\frac{-h}{h+1}}-1}{\frac{-h}{h+1}}\right)\times\frac{-e}{h+1}\right)=-1-e$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{h+1+e^{\frac{1}{h+1}}-1-e}{h}$$
$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\left(1+\frac{e^{\frac{-h}{h+1}}-1}{\frac{-h}{h+1}}\times\frac{-e}{h+1}\right)=1-e$$

الاستنتاج : لدينا: $\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}\neq\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

إذن : الدالة k لا تقبل الاشتقاق في 0 .

ب) **التفسير الهندسي:** بما أن الدالة k قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين وقابلة للاشتقاق في 0 من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماسين في النقطة التي فاصلتها 0 ومنه $A(0;e+1)$ هي نقطة زاوية.

2/ كتابة معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحنى

(C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ معادلته $y=-x+2$

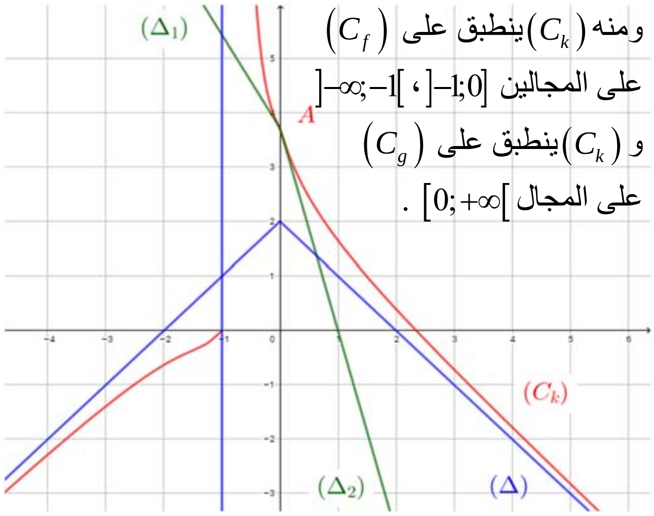
(C_k) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$:

$$(\Delta_1): y=(1-e)x+e+1 \quad ; \quad x\le 0$$
$$(\Delta_2): y=(-1-e)x+e+1 \quad ; \quad x\ge 0$$

3/ رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) :

لدينا $\begin{cases} k(x)=f(x) & ; \quad x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \\ k(x)=g(x) & ; \quad x\ge 0 \end{cases}$

ومنه (C_k) ينطبق على (C_f) على المجالين $]-\infty;-1[$ ، $]-1;0]$ و (C_k) ينطبق على (C_g) على المجال $[0;+\infty[$.



التمرين الثالث:

g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2\ln x$

1/ دراسة تغيرات g: $\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

* g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=2x+\frac{2}{x}\succ 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

***جدول التغيرات:**

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2/تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّوحيدا β حيث $0.75<\beta<0.76$:

* g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على $]0.75;0.76[$

$g(0.75)\approx -0.013$ و $g(0.76)\approx 0.029$ إذن $g(0.75)\times g(0.76)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0.75<\beta<0.76$

3/ إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$:

x	0		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) $f(x)=1-x+\frac{2}{x}(1+\ln x)$ ، $D_f=]0;+\infty[$

1/أ)حساب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

ب) نبين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}(1+\ln x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right]=0$$

ج) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

لدينا $\left[f(x)-(-x+1)\right]=\frac{2}{x}(1+\ln x)$ و منه إشارة الفرق هي من إشارة $(1+\ln x)$ وهي :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$1+\ln x$		$-$	0	$+$	

إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على $]\frac{1}{e};+\infty[$ وتحت (Δ) على المجال $]0;\frac{1}{e}[$ و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{1}{e};\frac{-1+e}{e}\right)$.

2/ أ*إثبات انه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة الاشتقاق على D_f و دالتها المشتقة f' حيث

$$f'(x)=-1+\left[\frac{-2}{x^2}(1+\ln x)+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}\right]=-\frac{(x^2+2\ln x)}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f : من أجل كل x من D_f

لدينا : إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ و هي :

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

*** جدول تغيرات الدالة f :**

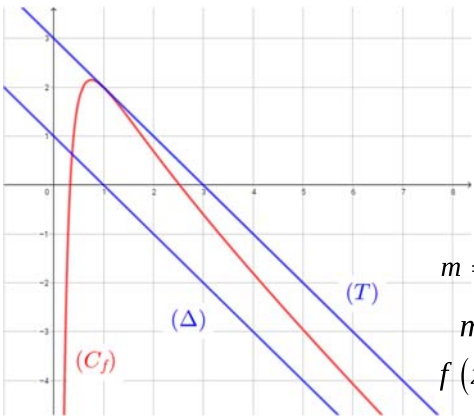
x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

3/أ* نبين أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ): نحل المعادلة

$f'(x)=-1$ معناه $\frac{-g(x)}{x^2}=-1$ معناه $x^2+2\ln x=x^2$

ومنه $\ln x=0$ ومنه $x=1$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ معادلته $y=-x+3$

ب*التمثيل البياني:



4/تعيين m حتى تقبل المعادلة (E) حلين مختلفين موجبين :

(E) تكافئ $m=\frac{2}{x}(1+\ln x)$ أي أن $m=f(x)-1+x$ ومنه $f(x)=-x+m+1$

حلول (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y=-x+m+1$ الموازية لـ(T) و(Δ) ومنه نجد: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين موجبين تماما : من أجل $m+1\in]1;3[$ أي $m\in]0;2[$