تصحيح الاختبار الثلاثي الاول شعبة الثالثة علوم التجريبية

التمارين	عناصر الإجابة	التنقيط مجزأة	 كاملة
التمرين الاول	1) الاجابة (ج) : $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\frac{1}{24}$ لدينا $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ حالة عدم التعيين لنزيل هذه الحالة نضرب في المرافق فنجد $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x+7}+3\right)(x+2)(x-2)}$ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+7}+3\right)(x+2)}=\frac{1}{24}$. 2) اذا كانت $f'(x)=\frac{1}{x^2+3}$ و كانت $h(x)=f(3x)$ الاجابة (ج) : لأن $h'(x)=3f'(3x)=\frac{3}{(3x)^2+3}=\frac{3}{9x^2+3}=\frac{1}{3x^2+1}$ 3) حلول المعادلة : $2[\ln(x)]^2-5\ln(x)+2=0$ هي الاجابة (ب) $\begin{cases}x=e^2\\ x=\sqrt{e}\end{cases}$ او نضع $X=\ln(x)$ تصبح المعادلة $2[\ln(x)]^2-5\ln(x)+2=0$ كما يلي $2X^2-5X+2=0$ نحسب المميز Δ= 9 للمعادلة حلين هما $\begin{cases}X=\frac{1}{2}\\ X=2\end{cases}$ او أي ان $\begin{cases}\ln(x)=\frac{1}{2}\\ \ln(x)=2\end{cases}$ او يكافئ $\begin{cases}x=e^{\frac{1}{2}}\\ x=e^2\end{cases}$ او يكافئ $\begin{cases}x=\sqrt{e}\\ x=e^2\end{cases}$ او . 4) أحسن تقريب تالفي للدالة : $x\mapsto\ln(x)$ بجوار 2 هو (أ) $\frac{1}{2}x+\ln 2-1$ $f(x)=\ln(x)$ ومنه $f'(x)=\frac{1}{x}$ التقريب التألفي للدالة f بجوار 2 هو $f(x)\approx f'(2)(x-2)+f(2)$ أي ان $f(x)\approx\frac{1}{2}(x-2)+\ln(2)$ و منه $f(x)\approx\frac{1}{2}x+\ln(2)-1$.	(0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5)	4
التمرين الثاني	1) حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=0$............(I) تكافئ $y'=-\frac{1}{2}y$ حلها العام هو $y=Ce^{-\frac{1}{2}x}$ حيث C ثابت حقيقي . الحل الخاص f الذي يحقق $f'(0)=1$. أي ان $f(x)=Ce^{-\frac{1}{2}x}$, ومنه $f'(x)=-\frac{1}{2}Ce^{-\frac{1}{2}x}$ بالتعويض بـ 0 نجد $f'(0)=-\frac{1}{2}C$ و $f'(0)=1$ و منه $-\frac{1}{2}C=1$ إذن $C=-2$ وبالتالي نجد $f(x)=-2e^{\frac{1}{2}x}$.	(0,5) (0,5)	4

2) نعتبر المعادلة التفاضلية (II) ....$2y'+y=x^2+3x$.

لدينا $g(x)=x^2-x+2$ و $g'(x)=2x-1$ و منه

$2g'(x)+g(x)=4x-2+x^2-x+2=x^2+3x$ أي أن

$2g'(x)+g(x)=x^2+3x$ إذن g حل للمعادلة (II).

(1)

3) إثبات انه تكون الدالة h حل للمعادلة التفاضلية (II) إذا وفقط إذا كان $h-g$ حل للمعادلة التفاضلية (I)

- إذا كان $h-g$ حل للمعادلة التفاضلية (I) يكافئ $2(h-g)'(x)+(h-g)(x)=0$ و منه $2h'(x)+h(x)=2g'(x)+g(x)$ و بما $2g'(x)+g(x)=x^2+3x$ فإن $2h'(x)+h(x)=x^2+3x$ و منه h حل للمعادلة (II).

- إذا كان h حل للمعادلة (II) يعني أن $2h'(x)+h(x)=x^2+3x$ و لدينا $2g'(x)+g(x)=x^2+3x$ بطرح المعادلتين نجد $2(h-g)'(x)+(h-g)(x)=0$ و منه $h-g$ حل للمعادلة التفاضلية (I).

(1)

استنتاج حلا للمعادلة التفاضلية (II)

$h(x)-g(x)=Ce^{\frac{-1}{2}x}$ و منه $h(x)=g(x)+Ce^{\frac{-1}{2}x}$ أي ان $h(x)=x^2+3x+Ce^{\frac{-1}{2}x}$.

(1)

التمرين الثالث — 5

1) من جدول التغيرات لدينا $f(1)=1$; $f(3)=1$ اي ان $1+a+b=1$ و $3+3a+b=1$ اي ان $a=-b$ و $3a+b=-2$ و منه بالتعويض نجد $-3b+b=-2$ و منه $b=1$ و $a=-1$ بالتعويض في العبارة نجد

$(0,25)\times 2$

$f(x)=x+\frac{-x+1}{(x-2)^2}$ بتوحيد المقامات نجد

$$f(x)=\frac{x(x-2)^2-x+1}{(x-2)^2}=\frac{x(x^2-4x+4)-x+1}{(x-2)^2}=\frac{x^3-4x^2+4x-x+1}{(x-2)^2}$$

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+3x+1}{(x-2)^2}$$

$(0,5)$

2. حساب النهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=-\infty$ و

$(0,25)\times 2$

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$.

$(0,5)$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		¦	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$-\infty$

$(0,5)$

3.تبيين أن المعادلة : $f(x)=0......(1)$ تقبل 3 حلول على المجموعة $\mathbb{R}-\{2\}$.

لدينا :

- f دالة متزايدة و مستمرة على المجال $]-\infty;1]$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;1]$ أي انها تغير إشارتها على المجال $]-\infty;1]$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $]-\infty;1]$.

$(0,5)$

- f دالة متناقصة و مستمرة على المجال $[1;2[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;1]$ أي

$(0,5)$

انها تغير إشارتها على المجال $]1;2[$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $]1;2[$.

(0,5)

– f دالة متزايدة و مستمرة على المجال $]2;+\infty[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;+\infty[$ أي انها تغير إشارتها على المجال $]2;+\infty[$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $]2;+\infty[$.مما سبق نستنتج ان للمعادلة (1) ثلاثة حلول على مجموعة تعريفها .

(0,5)

4. إثبات أن: $f'(x)=\frac{x^3-6x^2+13x-8}{(x-2)^3}$ لدينا $f(x)=x+\frac{-x+1}{(x-2)^2}$ و منه

$$f'(x)=1+\frac{-(x-2)^2-2(x-2)(-x+1)}{(x-2)^4}=1+\frac{(x-2)[-x+2+2x-2]}{(x-2)^4}=1+\frac{x}{(x-2)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)^3+x}{(x-2)^3}=\frac{x^3-6x^2+12x-8+x}{(x-2)^3}=\frac{x^3-6x^2+13x-8}{(x-2)^3}\ .$$

5. إثبات أنه يوجد مماس للمنحنى (C) موازي للمستقيم ذو المعادلة $y=x$ اي ان المعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلا

(0,5)

$f'(x)=1$ يكافئ $\frac{x^3-6x^2+13x-8}{(x-2)^3}=1$ يكافئ $x^3-6x^2+13x-8=(x-2)^3$ و $x\neq 2$

أي أن $x^3-6x^2+13x-8=x^3-6x^2+12x-8$ يكافئ $x=0$ و منه المنحنى (C) يقبل مماسا عند النقطة $A\left(0\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ موازيا للمنصف الأول ذو المعادلة $y=x$

التمرين الرابع — 7

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=4xe^{2x}+1$

1- النهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها

$(0,25)\times 2$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 4xe^{2x}=+\infty$. و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} 4xe^{2x}=0$)

(0,25)

2- حساب $g'(x)$: $g(x)=4e^{2x}+8xe^{2x}=4(1+2x)e^{2x}$ إشارتها من إشارة $(1+2x)$

(0,25)

و منه g متزايدة على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و متناقصة على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

شكل جدول التغيرات g :

(0,5)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1 ↘	$-2e^{-1}+1$	↗ $+\infty$

3- استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)>0$ مما سبق لاحظنا من جدول تغيرات الدالة تقبل قيمة حدية صغرى هي $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$ عدد موجب تماما

(0,25)

و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)>0$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+(2x-1)e^{2x}$

ليكن $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1- أ) التحقق أنه لأجل كل x من $\mathbb{R}$ أن : $f'(x)=g(x)$:

$f'(x)=1+2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}=1+2e^{2x}+4xe^{2x}-2e^{2x}=1+4xe^{2x}=g(x)$. و منه (0,25) (0,25)

الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$ لان g موجبة على $\mathbb{R}$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$ لأن (0,25)×2

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}=0$.

جدول تغيرات f : (0,5)

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2

2- أ) إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}_f$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}=0$ و منه (d) مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}_f$. (0,5)

ب) دراسو وضعية المنحنى $\mathcal{C}_f$ بالنسبة للمستقيم (d) لدينا $[f(x)-x]=(2x-1)e^{2x}$ (0,25)

إشارة الفرق من إشارة $(2x-1)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
إشارة $2x-1$	-	0	+
الوضعية	(C_f) يقع تحت (d)	(C_f) يقطع (d)	(C_f) يقع فوق (d)

(0,5)

3- إثبات أن المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق

$0,40 \prec \alpha \prec 0,41$. بما أن f مستمرة و متزايدة على $\mathbb{R}$ و $f(0,40)=-0,04511$ و (1)

$f(0,41)=0,00131$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

α.

4- كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=x-1$ (0,5)

5- أنشئ المماس (Δ) المستقيم (d) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$. (1)