ثانوية الشيخ عمر المختار   حل الموضوع الاول: الأستاذ: زيان أسامة

التمرين الاول: التفسير الهندسي لكل عبارة

1) النقطة $(x_0,f(x_0))$ نقطة زاوية و (C_f) يقبل نصفي مماس على يمين ويسار x_0 ميل كل منها 1 و -1

2) المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ م م م لـ (C_f) بجوار $+\infty$

3) (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α حيث $\alpha\in]A;B[$.

4) بيان الدلة مربع منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

التمرين الثاني: (1 نص مبرهنة القيم المتوسطة.

2) اثبات ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in[-2,-1]$

من البيان الدالة f دالة معرفة ومستمرة ورتيبة على المجال $[-2,-1]$

ولدينا: $\begin{cases} f(-2)=-2 \\ f(-1)=2 \end{cases}$ و $f(-2)\times f(-1)<0$

ومنه ح م ق م المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in[-2,-1]$

3) المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلان هما $x=1$ او $x=-1$

المعادلة $f(x)=-2$ تقبل حلان هما $x=1$ او $x=-2$

4) النقطة $O(0,0)$ هي نقطة إنعطاف

التبرير: لان المماس عند $O(0,0)$ يخترق المنحنى (C_f)

5) $\lim_{x\to-\infty} e^{f(x)}=e^{-\infty}=0$

التمرين الثالث:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $-e^{2x}+e^{x}+2=0$

بوضع: $e^{x}=t$, $e^{2x}=t^2$

تصبح المعادلة من الشكل: $-t^2+t+2=0\cdots(1)$

$\Delta=9$ للمعادلة (1) حلان هما $t=-1$ او $t=2$

وبالتالي لما: $t=-1=e^{x}$ مرفوض ولما $t=2=e^{x}$ أي $x=\ln 2$

ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو $S=\{\ln 2\}$

2) تعين قيم x في كل حالة:

للدالة f قيم حدية محلية: معناه حلول المعادلة $f'(x)=0$

لدينا: $f'(x)=-e^{2x}+e^{x}+2=0$ أي $x=\ln 2$

ومنه توجد قيمة حدية وحيدة $(\ln 2,f(\ln 2))$ أي $(\ln 2,2\ln 2)$

الدالة f متزايدة تماما و متناقصة تماما .

ندرس اشارة $f'(x)$.

لما $x\in]\ln 2,+\infty[$ فان $f'(x)<0$ ومنه f' دالة متناقصة تماما

لما $x\in]-\infty,\ln 2[$ فان $f'(x)>0$ ومنه f' دالة متزايدة تماما

3) نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل

معناه حل المعادلة $g(x)=-[\ln(x+1)]^2+\ln(x+1)+2=0$

بوضع: $\ln(x+1)=r$, $[\ln(x+1)]^2=r^2$

تصبح المعادلة من الشكل: $-r^2+r+2=0\cdots(1)$

حلاها هما $r=-1$ او $r=2$

لما: $r=-1=\ln(x+1)$ أي $x+1=e^{-1}$ ومنه $x=e^{-1}-1$

ولما $r=2=\ln(x+1)$ أي $x+1=e^{2}$ ومنه $x=e^{2}-1$

ومنه فواصل نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل $S=\{e^{-1}-1,e^{2}-1\}$

التمرين الرابع:

g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-x}-x-2$

1) دراسة التغيرات

المشتق و اتجاه التغير: $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ ومنه g دالة متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، جدول التغيرات

2) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in[-1,0]$

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

3) اشارة $g(x)$.

لما $x\in]\alpha,+\infty[$ فان $g(x)<0$، لما $x\in]-\infty,\alpha[$ فان $g(x)>0$

II) f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)(1-e^{-x})$

اشارة $f(x)$: لما $x\in[0,1]$ فان $f(x)\le 0$

لما $x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$ فان $f(x)\ge 0$.

النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

اثبات أن: $f'(x)=e^{-x}g(-x)$

اتجاه التغير:

لما $x\in]-\infty,-\alpha[$ فان f متناقصة تماما، لما $x\in]-\alpha,+\infty[$ فان f متزايدة تماما.

تبيان: $f(\alpha)=1-\alpha^2$: $e^{-\alpha}=\alpha+2$ بالتعويض في $f(\alpha)$ والتبسيط

نجد: $f(\alpha)=1-\alpha^2$. الحصر: $0\le f(\alpha)\le 1$

تبيان ان المستقيم $(\Delta): y=x-1$ م.م لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$

الوضع النسبي :

ندرس اشارة : $f(x)-(x-1)$

لما $x\in]-\infty,1[$ فإن : (C_f) فوق (Δ).

لما $x\in]1,+\infty[$ فإن : (C_f) تحت (Δ).

لما $x=1$ فإن : (C_f) يقطع (Δ).

تعين قيمة m التي يكون من أجلها (T_m) مماسا لـ (C_f)

معناه حل المعادلة : $f'(x_0)=1$ أي $x_0=2$

معادلة المماس عند $x_0=2$ هي : $(T): y=x-1-e^{-2}$

بالمطابقة نجد: $m=-1-e^{-2}$

عين قيم m التي من أجلها المعادلة $(m+1)e^{x}+x-1=0$ لا تقبل حلول.

$(m+1)e^{x}+x-1=0$ تكافئ: $f(x)=x+m$ ،

من البيان نجد قيم m هي : $m\in]-\infty,-1-e^{-2}[$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الاول: التفسير الهندسي لكل عبارة

1) لا يمكن رسم المنحنى (C_f) من دون رفع القلم عند $x=x_0$.

2) المستقيم $(\Delta): y=x+1$ م.م.م لـ (C_f) بجوار $-\infty$

3) المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=1$ في نقطة فاصلتها x_0

4) النقطة $(a,f(a))$ نقطة انعطاف

التمرين الثاني: 1) دراسة استمرارية الدالة f عند $x=0$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0} e^x+1=2$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0} x^2+1=1 \quad \text{و} \quad f(0)=1$$

ومنه f غير مستمرة عند $x=0$

2) **قابلية اشتقاق الدالة** f عند $x=0$

من اليمين: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^x-1}{x}=1$

من اليسار: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x^2}{x}=0$ ومنه f غير ق .إ عند $x=0$

ت .ه : النقطة $(0,f(0))$ نقطة زاوية و (C_f) يقبل نصفي مماس على يمين ويسار x_0 ميل كل منها 1 و 0

النهايات: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=2$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=1$.

اتجاه التغير:

المشتق: $f'(x)=\begin{cases} e^x & si\ \ x\ge 0 \\ 2x & si\ \ x<0 \end{cases}$

اشارة المشتق واتجاه التغير:

لما $x\in[0,+\infty[$ f دالة متزايدة تماما.

لما $x\in]-\infty,0[$ f دالة متناقصة تماما.

التمرين الثالث: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $-2e^{2x}+2e^x=0$

بوضع: $e^x=t$, $e^{2x}=t^2$

تصبح المعادلة من الشكل: $-t^2+2t=0\cdots(1)$

$\Delta=4$ للمعادلة (1) حلان هما $t=0$ او $t=2$

و بالتالي لما: $t=1=e^x$ مرفوض ولما $t=2=e^x$ أي $x=\ln 2$

ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو $S=\{\ln 2\}$

عين قيم x في كل حالة:

فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

معناه حل المعادلة: $f(x)=0$ أي $(e^x+1)(3-e^x)=0$

$(e^x+1)=0$ أي $e^x=-1$ مرفوض

او $(3-e^x)=0$ أي $e^x=3$ ومنه $x=\ln 3$

اذن توجد نقطة وحيدة ذات الاحداثيات $(\ln 3,0)$

للدالة f قيم حدية محلية: معناه حلول المعادلة $f'(x)=0$

لدينا: $f'(x)=-2e^{2x}+2e^x=0$ أي $x=\ln 2$

ومنه توجد قيمة حدية وحيدة $(\ln 2,f(\ln 2))$ أي $(\ln 2,2\ln 2)$

الدالة f متزايدة تماما و متناقصة تماما .

ندرس اشارة $f'(x)$.

لما $x\in[\ln 2,+\infty[$ فان $f'(x)<0$ ومنه f' دالة متناقصة

لما $x\in]-\infty,\ln 2[$ فان $f'(x)>0$ ومنه f' دالة متزايدة تماما

3) نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل

معناه حل المعادلة $g(x)=-2[\ln(x+1)]^2+2\ln(x+1)=0$

بوضع: $\ln(x+1)=r$, $[\ln(x+1)]^2=r^2$

تصبح المعادلة من الشكل: $-r^2+r+2=0\cdots(1)$

حلاها هما $r=0$ او $r=2$

لما: $r=0=\ln(x+1)$ أي $x+1=1$ ومنه $x=e^{-1}$

ولما $r=2=\ln(x+1)$ أي $x+1=e^2$ ومنه $x=e^2-1$

ومنه فواصل نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل $S=\{e^{-1},e^2-1\}$.

التمرين الرابع:

1) **النهايات:** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=+\infty$

2) بين أنه من أجل كل x من D ان : $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}$

3) اتجاه تغير الدالة f: $f'(x)>0$ أي f دالة متزايدة تماما على D_f.

4) بين أن الدالة f دالة فردية: نثبت ان $f(-x)=-f(x)$

5) استنتاج كل من $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.

باستعمال العلاقة السابقة: $f(-x)=-f(x)$ نجد ان:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=-\infty$$

6) بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in]0,+\infty[$

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

7) استنتج حلا آخر للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي الى $]-\infty,0[$

باستعمال العلاقة السابقة: $f(-x)=-f(x)$ نجد ان: $f(-\alpha)=-f(\infty)=0$

والمجالان $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ متناظران بالنسبة للمبدأ اذن الحل هو $-\alpha$

8) المستقيم (d) ذو المعادلة $(d): y=x-1$ م.م.م لـ (C_f) بجوار $+\infty$

بعد الحساب نجد: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$

9) استنتج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعين معادلته

نظير المستقيم $(d): y=x-1$ بالنسبة للمبدأ هو المستقيم $(\Delta): y=x+1$

ومنه $(\Delta): y=x+1$ م م م لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

10) المناقشة البيانية: لما $m\in]-\infty,0]$ للمعادلة حل وحيد سالب

لما $m\in[0,2]$ لا يوجد حلول. لما : $m\in[2,+\infty[$ للمعادلة حل وحيد موجب