الإجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول:

1 جدول تغيرات الدالة k

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	0	+	
$k(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

2 إشارة $k(x)$ على مجال تعريفها:

x	$-\infty$		$-3/2$		0		$+\infty$
$k(x)$		-	0	+	0	+	

✓ نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$ بـ : $h(x) = \ln[k(x)]$

1 نهايات الدالة h عند أطراف مجال تعريفها

* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim\limits_{|x|\to 0} h(x) = \lim\limits_{|x|\to 0} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
* $\lim\limits_{x\to -3/2} h(x) = \lim\limits_{x\to -3/2} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة h واستنتاج جدول تغيراتها :

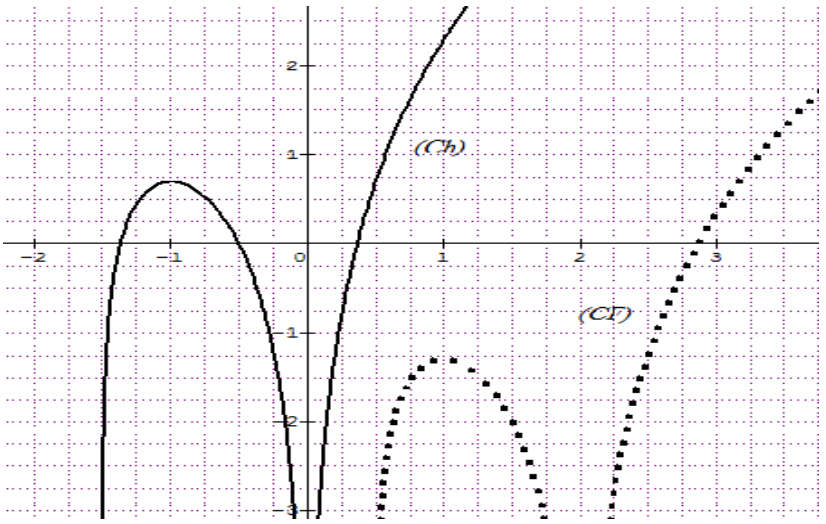
- **نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:** لدينا من اجل كل $x \in \left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$: $h'(x) = \frac{k'(x)}{k(x)}$ إذن:

x	$-3/2$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	‖	+	
$k(x)$		+		+	‖	+	
$h'(x)$		+		-	‖	+	

- **جدول تغيرات الدالة h :**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	‖	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3 المنحنى البياني (C_h) :



✓ لتكن الدالة F المعرفة على $\left]\frac{1}{2}\ ,\ 2\right[\cup\left]2\ ,+\infty\right[$ بـ : $F(x)=h(x-2)-2$

1 يتم إنشاء (C_F) المنحنى البياني لـ $F(x)$: بانسحاب (C_h) بيان الدالة h بشعاع قدره : $\vec{v}\binom{2}{-2}$

التمرين الثاني:

I) g دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $g(x)=(a-2x)e^{x+1}+b$

1 عين العددان الحقيقيان a و b: لدينا g هي حل للمعادلة التفاضلية (E): يعني أن : $g'(x)-g(x)=-2e^{x+1}-2$

أي: $-2e^{x+1}+(a-2x)e^{x+1}-[(a-2x)e^{x+1}+b]=-2e^{x+1}-2$

ومنه $-2e^{x+1}-b=-2e^{x+1}-2$ و بالمطابقة نجد: $b=2$

ولدينا: المنحنى (C_g) يقبل مماس معامل توجيهه 1 عند النقطة التي فاصلتها $(x=-1)$: يعني أن: $g'(-1)=1$

حيث : $g'(x)=-2e^{x+1}+(a-2x)e^{x+1}=(a-2-2x)e^{x+1}$ ومنه : $\left(a-2-2(-1)\right)e^{-1+1}=1$

إذن: $a=1$ وبالتالي: $g(x)=(1-2x)e^{x+1}+2$

1 أ دراسة اتجاه تغير الدالة g : g دالة معرفة على $\mathcal{R}$ بـ : $g(x)=(1-2x)e^{x+1}+2$

- نحسب نهايات الدالة g:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((1-2x)e^{x+1}+2\right)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((1-2x)e^{x+1}+2\right)=-\infty$$

- نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:

$$g'(x)=(-1-2x)e^{x+1}$$

لدينا من اجل كل $x\in\mathcal{R}$ $g'(x)=0$ إذا كان : $(-1-2x)=0$ أي $x=-\frac{1}{2}$

ومنه:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	

اذن:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	2	↗	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

ب اثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا بحيث $\alpha\in\left]0.68\ ,\ 0.69\right[$:

- الدالة g دالة معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ ادن فهي حتما معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0.68\ ,\ 0.69]$
- ولدينا $\begin{cases}g(0.68)=0.0683\\ g(0.69)=-0.0594\end{cases}$ أي $g(0.68)\times g(0.69)<0$
- ادن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن العادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا حيث $\alpha\in\left]0.68\ ,\ 0.69\right[$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathcal{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

II) نعتبر الدالة f دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $f(x)=1+\frac{4x+2}{1+e^{x+1}}$

1) أ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$:

$$f'(x)=\frac{4(1+e^{x+1})-e^{x+1}(4x+2)}{(1+e^{x+1})^2}=\frac{4+4e^{x+1}-4xe^{x+1}-2e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2}=\frac{2e^{x+1}-4xe^{x+1}+4}{(1+e^{x+1})^2}=\frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$$

ب استنتاج إشارة الدالة f' على R :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	

2) بين أن : $f(\alpha) = 4\alpha - 1$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا $f(\alpha) = 1 + \frac{4\alpha+2}{1+e^{\alpha+1}} \dots\dots\dots (1)$

ولدينا : $g(\alpha) = (1-2\alpha)e^{\alpha+1} + 2 = 0$ إذن : $e^{\alpha+1} = \frac{-2}{(1-2\alpha)} \dots\dots\dots (2)$

بالتعويض (2) في (1) نجد $f(\alpha) = 1 + \frac{4\alpha+2}{1+\frac{-2}{(1-2\alpha)}} \dots\dots\dots (1)$ و بعد توحيد المقامات والتبسيط نجد : $f(\alpha) = \frac{8\alpha^2+2\alpha-1}{1+2\alpha}$

وباستعمال القسمة الاقليدية نجد: $f(\alpha) = \frac{(1+2\alpha)(4\alpha-1)}{(1+2\alpha)}$ ومنه $\boxed{f(\alpha) = 4\alpha - 1}$

- حصر $f(\alpha)$: لدينا $0.68 \le \alpha \le 0.69$

بضرب طرفي المتباينة في العدد (4) نجد : $4(0.68) \le 4\alpha \le 4(0.69)$

بإضافة العدد (-1) إلى الطرفين نجد : $4(0.68) - 1 \le 4\alpha - 1 \le 4(0.69) - 1$

ومنه نستنتج أن: $\boxed{1.72 \le f(\alpha) \le 1.76}$

3) أ/ التحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (4x+3) = \frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$

$$f(x) - (4x+3) = \frac{4x+2}{1+e^{x+1}} - 4x - 2 = \frac{4x+2-4x-4xe^{x+1}-2-2e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = \frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$$

ب/ حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (4x+3)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 1]$ ثم تفسير النتائج هندسيا:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (4x+3)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-2e^{x+1}-4xe^{x+1}}{1+e^{x+1}}\right] = 0$

ومنه نستنتج أن $y = 4x + 3$ هي معادلة لمستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 1] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4x+2}{1+e^{x+1}}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{e^{x+1}}{x}}\right] = 0$

ومنه نستنتج أن $y = 1$ هي معادلة لمستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

4) ادرس وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 4x + 3$

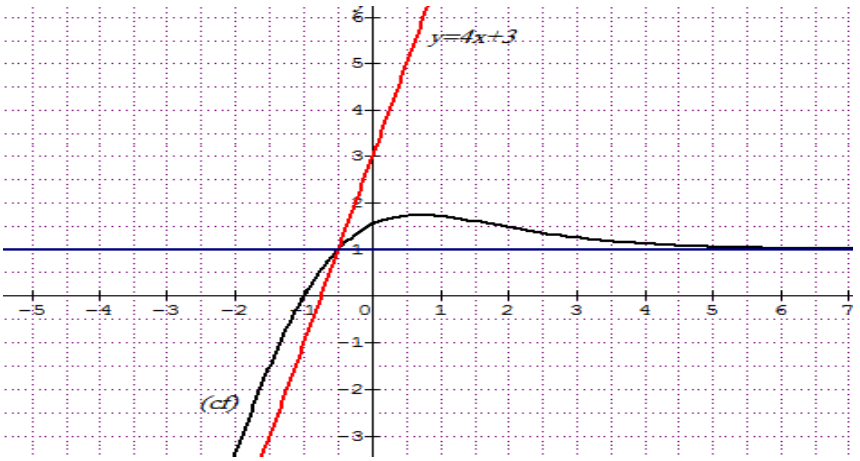
نحل المعادلة : $f(x) - (4x+3) = 0$ أي $\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = 0$ ويتحقق ذلك إذا كان $(-2-4x) = 0$ أي $x = -\frac{1}{2}$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$	(C_f) تحت (Δ)

5) شكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 1

6) ارسم المستقيمات المقاربة والمنحنى البياني (C_f) :



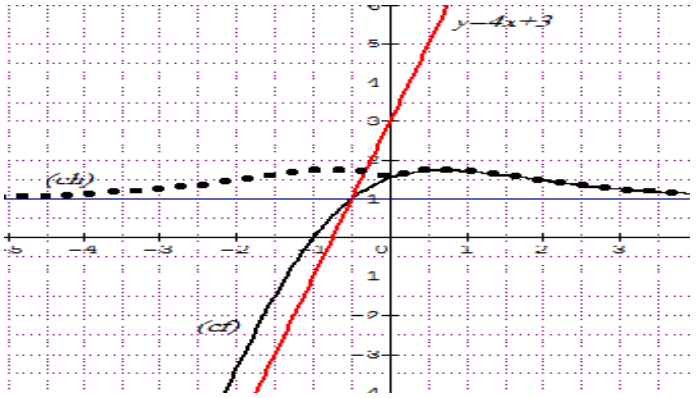
III) لتكن الدالة h دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $h(x) = 1 + \frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}}$

1) إثبات أن الدالة h دالة زوجية :

$h(-x) = 1 + \frac{4|-x|+2}{1+e^{|-x|+1}} = 1 + \frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}} = h(x)$ لان : $|-x| = |x|$ ومنه $h(x)$ دالة زوجية

2) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h في نفس المعلم السابق :

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4x+2}{1+e^{x+1}} = f(x) & , \quad x \geq 0 \\ 1 + \frac{2-4x}{1+e^{1-x}} = f(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$



3) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $e^{|x|+1} + 4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - 1$:

لدينا: $e^{|x|+1} + 4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - 1$

أي : $4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - 1 - e^{|x|+1}$ ومنه $4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - (1 + e^{|x|+1})$

وبقسمة الطرفين على $(1 + e^{|x|+1})$ نجد : $\frac{4|x|+2}{(1+e^{|x|+1})} = -m - 1$ أي: $\frac{4|x|+2}{(1+e^{|x|+1})} + 1 = -m$

وبالتالي المعادلة تصبح: $h(x) = -m$

المناقشة

- $m \in]-\infty , -f(\alpha)[$ المعادلة $h(x) = -m$ لا تقبل حل
- $m = -f(\alpha)$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل حلين مضاعفين احدهما موجب α والآخر سالب $-\alpha$
- $m \in]-f(\alpha) , -f(0)[$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل أربعة حلول حلين موجبين وحلين سالبين
- $m = -f(0)$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل ثلاثة حلول حل معدوم وحل موجب وآخر سالب
- $m \in]-f(0) , -1[$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل حلين احدهما موجب والآخر سالب
- $m \in [-1 , +\infty[$ المعادلة $h(x) = -m$ لا تقبل حل