حل بكالوريا :دورة جوان 2011

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1 . المتتالية بـ (v_n) هندسية و أساسها 3 لأن من أجل كل عدد طبيعي n ،

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}$ ومنه: $v_{n+1}=3u_n+1+\frac{1}{2}$ ، ومنه $v_{n+1}=3\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$ ،

أي: $v_{n+1}=3v_n$.

2 . نهاية المتتالية (u_n) هي : أ- $+\infty$ لأن:

لدينا $v_n=v_0\times 3^n$ وبما أن $3>1$ و $v_0=u_0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ ،

ولكون: $u_n=v_n-\frac{1}{2}$ نستنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

3 . جـ- $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$ لأن:

$$S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{\ln 3^2}+e^{\ln 3^3}+...+e^{\ln 3^n}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+3+3^2+3^3+...+3^n\right]$$

حيث المجموع $1+3+3^2+3^3+...+3^n$ هو مجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية أساسها 3

وحدها الأول 1 ومنه: $S_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني :

1 . المستوي (p) هو مجموعة النقط $M\ (x;y;z)$ بحيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

لدينا: $\vec{n}(-2;1;5)$ و $\overrightarrow{AM}\ (x-1;y+2;z-1)$ ومنه بعد الحساب و التبسيط نجد:

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ تكافئ $(p):-2x+y+5z-1=0$

2 . أ- بتعويض إحداثيات B في معادلة (p) نجد $-2(-1)+4+5(-1)-1=0$ محققة

ومنه $B\in(p)$ ، و بتعويض إحداثيات B في معادلة (Q) نجد $-1+2(4)-7=0$ محققة

ومنه $B \in (Q)$ ، إذن B مشتركة بين (p) و (Q).

ب – لدينا $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظم للمستوي (p) و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظم

للمستوي (Q) غير مرتبطين خطيا لأن: $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$ ومنه (p) و (Q) متقاطعان وفق

مستقيم (Δ) تمثيل ديكارتي له: $\begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$

وبوضع مثلا $z = t$ نستنتج من الجملة الأخيرة الجملة $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases}$ وهي تمثيل وسيطي

للمستقيم (Δ) ، حيث t وسيط حقيقي.

3 . لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ – لدينا: $d_1 = d(C;(P)) = \frac{|(-2)5 + (-2) + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}}$

ولدينا: $d_2 = d(C;(Q)) = \frac{|5 + 2(-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

ب– لدينا بالحساب : $\vec{n}.\vec{n'} = 0$ ومنه المستويان (p) و (Q) متعامدين.

جـ –لدينا: $d(C;(\Delta)) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ ومنه: $d(C;(\Delta)) = \sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}$

أي: $d(C;(\Delta)) = \sqrt{18}$.

التمرين الثالث :

1 . أ –لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{20i}{20} = i$ ، إذن: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$

ب –لدينا: $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1$ ، و $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

وبما أن: $\frac{AC}{AB} = 1$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ فإن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين في A .

2 . النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$.

أ – العبارة المركبة للتحويل T هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث $a = i$ و

$b = -1 - i$

بما أن a مركب غير حقيقي و $|a|=1$ فإن T دوران زاويته $arg(a)=\frac{\pi}{2}$ ، ومركزه النقطة ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}=\frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i=z_A$ ، ومنه النقطة A هي مركز الدوران T.

ب − بما أن: $AC=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

3. أ − لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-4+2i}{-6+3i}=\frac{2}{3}$.

بما أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ حقيقي فإن النقط A ، C و D في استقامية.

ب − لتكن k نسبة التحاكي h ، لدينا: $z_D-z_A=k\left(z_C-z_A\right)$ ومنه:

$k=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{3}{2}$ ، إذن: $k=\frac{3}{2}$

جـ لدينا : $T(B)=C$ و $h(C)=D$ ومنه: $(hoT)(B)=D$ ، أي: $S(B)=D$

وبالتالي نسبة التشابه S هي نسبة التحاكي h أي $\frac{3}{2}$ ، وزاويته هي زاوية الدوران T أي $\frac{\pi}{2}$.

التمرين الرابع :

I) أ ـ جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$

ب − $g(x)>0$ تكافئ $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

جـ $0<g(x)<1$ تكافئ $x\in\left]1;+\infty\right[$.

II) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $\left]1;+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1. بما أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{0^+}{2}=0^+$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ X\to 0}} lnX=-\infty$ فإن: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\infty$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=-\infty$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1$ و $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=\ln 1=0$ فإن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x=1$ كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$

ويقبل المستقيم الذي معادلته $y=1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

2 . أ –من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1-(-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

ب – الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}.$$

بما أن: $\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ و $\dfrac{x-1}{x+1}>0$ على المجال $]1;+\infty[$ فإن: $f'(x)>0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1

ب– $g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

3 . أ –جدول إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$:

x	1	$+\infty$
$\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$	$-$	

ب- الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha)-x$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ كونها عبارة عن مجموع و مركب و جداء دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ، كما أن مشتقتها هي الدالة : $x \mapsto 1\times ln(x-\alpha)+\cancel{(x-\alpha)}\times\frac{1}{\cancel{(x-\alpha)}}-1$

أي الدالة: $x \mapsto ln(x-\alpha)$

ومنه الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto ln(x-\alpha)$ على المجال $]1;+\infty[$.

جـ- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$1-\frac{2}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}=g(x) .$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1}+ln(x-1)-ln(x+1)$$

وبالتالي الدالة F حيث:

$$F(x)=x-2ln(x-1)+\left[(x-1)ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)ln(x+1)-x\right]$$

أي: $F(x)=x+\left[(x-1)ln(x-1)\right]-\left[(x+3)ln(x+1)-x\right]$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 . أ – من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، ومنه:

$v_{n+1}=\alpha u_n+1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، ومنه: $v_{n+1}=\alpha u_n+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ ، ومنه:

$v_{n+1}=\alpha\left(u_n+\dfrac{1}{\alpha-1}\right)$ ، أي : $v_{n+1}=\alpha v_n$. وهذا معناه أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب – $v_n=v_0\times\alpha^n$ حيث $v_0=u_0+\dfrac{1}{\alpha-1}=6+\dfrac{1}{\alpha-1}$ أي: $v_0=\dfrac{6\alpha-5}{\alpha-1}$.

ومنه: $v_n=\left(\dfrac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\alpha^n$.

ولدينا: $u_n=v_n-\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، ومنه: $u_n=\left(\dfrac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\alpha^n-\dfrac{1}{\alpha-1}$.

جـ- تكون المتتالية (u_n) متقاربة من أجل $-1<\alpha<1$.

2 . من أجل $\alpha=\dfrac{3}{2}$ لدينا $u_{n+1}=\dfrac{3}{2}u_n+1$ و $v_n=u_n+\dfrac{1}{\frac{3}{2}-1}$.

لدينا: $S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ ، من أجل $\alpha=\dfrac{3}{2}$ لدينا $v_0=\dfrac{6\times\frac{3}{2}-5}{\frac{3}{2}-1}$

أي: $v_0=8$ ، ومنه: $S_n=8\times\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}$ ، أي : $S_n=16\times\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$

لدينا: $u_n=v_n-\dfrac{1}{\alpha-1}=v_n-\dfrac{1}{\frac{3}{2}-1}$ ، أي: $u_n=v_n-2$

ومنه: $T_n=u_0+u_1+...+u_n=(v_0-2)+(v_1-2)+(v_2-2)+...+(v_n-2)$.

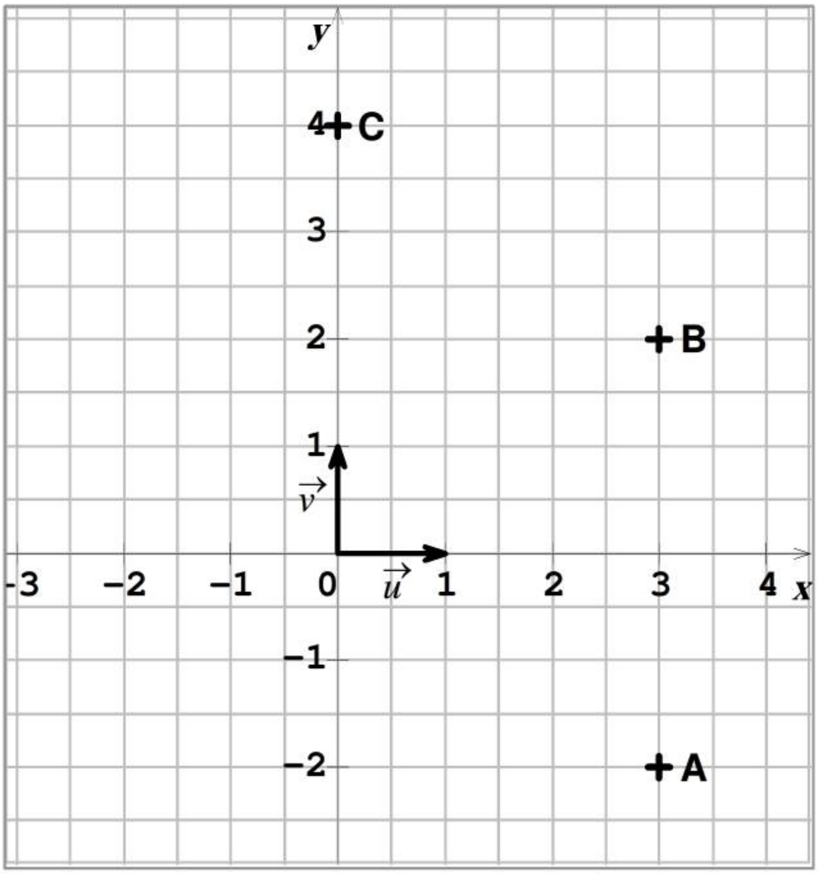
أي: $T_n=(v_0+v_1+v_2+...+v_n)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+...+(-2)$

ومنه: $T_n=S_n-2(n+1)$ ، وبالتالي: $T_n=16\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]-2(n+1)$

التمرين الثاني :

النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ ، $z_C=4i$.

1. أ – تعليم النقط $A\,(3;-2)$ ، $B\,(3;2)$ و $C\,(0;4)$:



ب – لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=4i$ ، و $z_{\overrightarrow{OC}}=z_C-z_O=4i$ ، ومنه: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{OC}}$

أي: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ وبالتالي الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

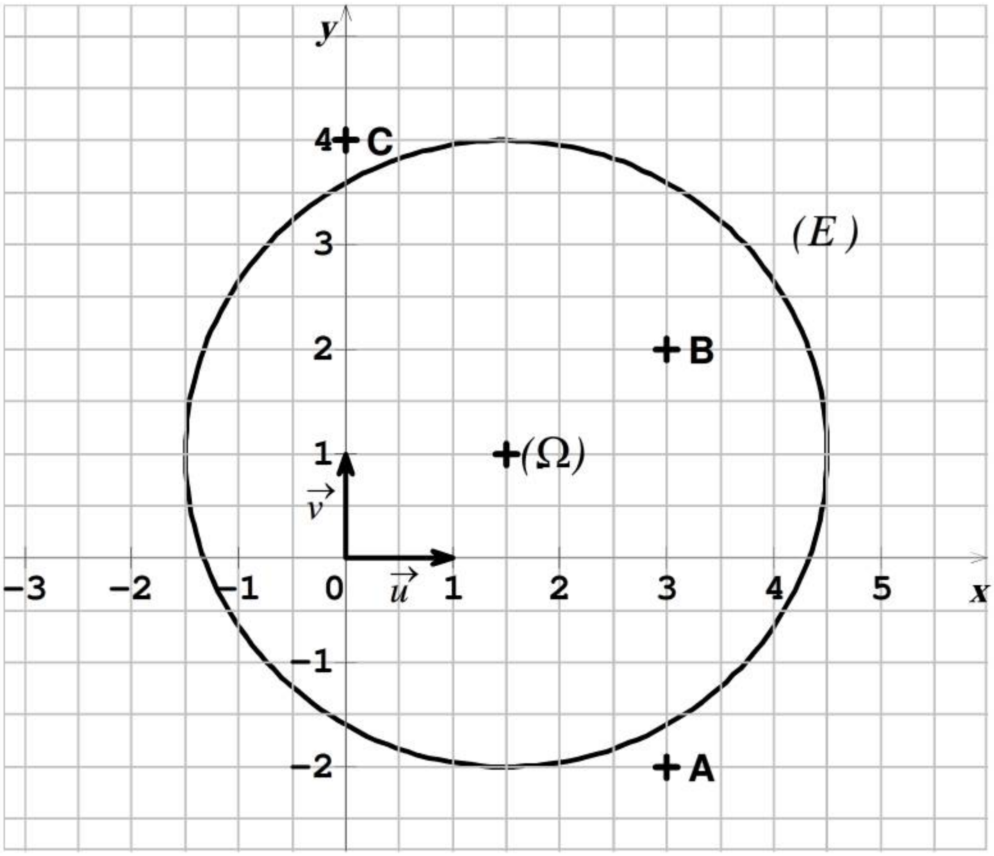
جـ- النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$ هي مرجح الجملة:

$\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ ، ومنه: $z_\Omega=\frac{z_O+z_A+z_B+z_C}{4}$ ،

بالحساب نجد $z_\Omega=\frac{3}{2}+i$.

2. $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ ، ومنه: $4M\Omega=12$

أي: $M\Omega=3$. وبالتالي (E) هي الدائرة ذات المركز Ω و نصف القطر 3



3. أ – مميز المعادلة $z^2-6z+13=0$ هو $\Delta=-16=(4i)^2$.

ومنه $z_0=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i=z_A$ و $z_1=\overline{z_0}=3+2i=z_B$.

ب- $|z-z_0|=|z-z_1|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ أي $AM=BM$ ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ ولكون A و B متناظرتين بالنسبة إلى محور الفواصل فإن مجموعة النقط هي حامل محور الفواصل .

التمرين الثالث :

1. أ – المستقيم (Δ) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث: $\begin{cases}x=2+1\times t\\ y=1+(-4)\times t\\ z=7+(-1)\times t\end{cases}$ ، أي:

$\begin{cases}x=2+t\\ y=1-4t\\ z=7-t\end{cases}$.حيث t وسيط حقيقي.

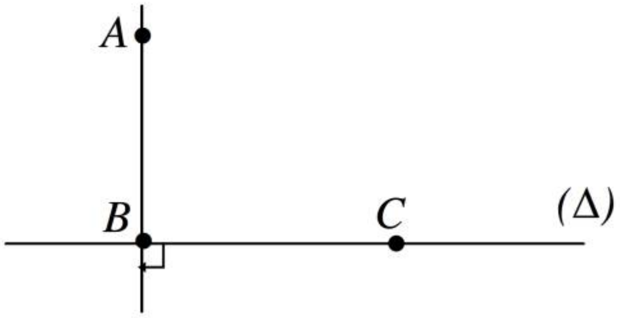
ب – بتعويض احداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد: $\begin{cases}3=2+t\\ -3=1-4t\\ 6=7-t\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$. بما أن t وحيد فإن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ- لدينا: $\overrightarrow{AB}\left(2;0;2\right)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1;-4;-1\right)$.

بما أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2\times1+0\times(-4)+2\times(-1)=0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د - $d\left(A;(\Delta)\right)=AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



2. نعتبر النقطة $M\left(2+t;1-4t;7-t\right)$ حيث t عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$.

أ-لدينا: $h(t)=\sqrt{\left(2+t\right)^2+\left(-4t\right)^2+\left(2-t\right)^2}$. ومنه: $h(t)=\sqrt{18t^2+8}$

ب- من أجل كل عدد حقيقي t لدينا: $h'(t)=\dfrac{18\times\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{18t^2+8}}$.

ومنه: $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ- إشارة $h'(t)$ هي من نفس إشارة $18t$ ومنه جدول إشارة $h'(t)$:

t	$-\infty$ 0 $+\infty$
$h'(t)$	$-$ 0 $+$

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن من أجل $t=0$.

من أجل $t=0$ يكون $h(0)=\sqrt{18\times0^2+8}$. أي: $h(0)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

نلاحظ أن: $d\left(A;(\Delta)\right)=h(0)$

التمرين الرابع :

1. أ-لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-ex-1\right)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-e-\dfrac{1}{x}\right)$، ولكون: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب ـ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=e^x-e$.

إشارة $f'(x)$:

. $f'(x)=0$ تكافئ $e^x=e$ أي $x=1$.

. $f'(x)<0$ تكافئ $e^x<e$ أي $x<1$.

. $f'(x)>0$ تكافئ $e^x>e$ أي $x>1$.

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f(1)=e^1-e-1=-1$

2 . أ ـ بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-ex-1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب ـ معادلة المستقيم (T) من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ،

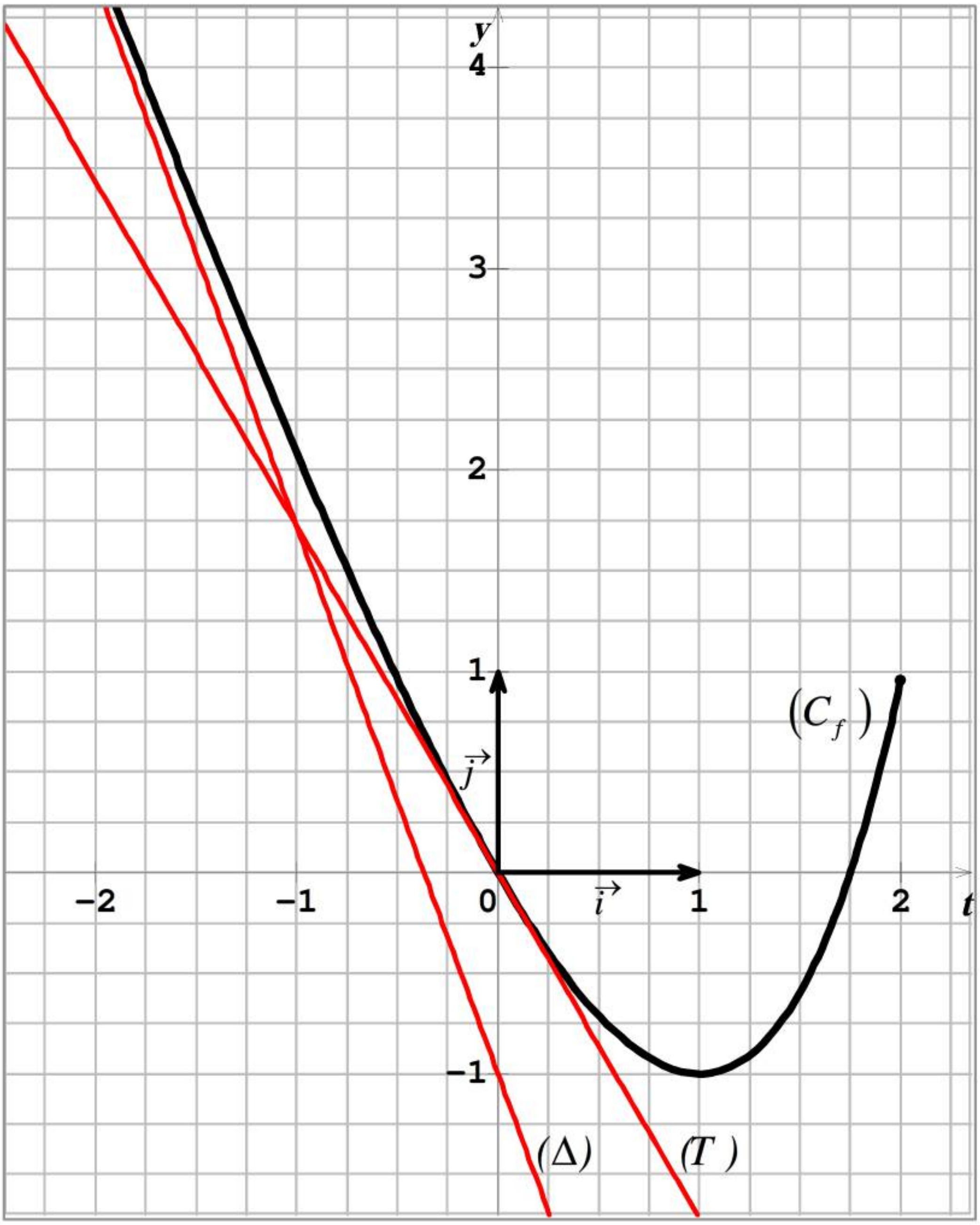
حيث: $f(0)=e^0-e\times0-1=0$ و $f'(0)=e^0-e=1-e$ ومنه: $(T):y=(1-e)x$.

جـ ـ المجال $]1,75;1,76[$ محتوى في المجال $[1;+\infty[$ وبالتالي الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1,75;1,76[$ ولكون $f(1,75)\approx-0,002<0$ و $f(1,76)\approx0,02>0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α ، أي يحقق $f(\alpha)=0$.

د ـ رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) في المجال $]-\infty;2]$:

$f(2)\approx0,95$



3 . أ ـ على المجال $[0;\alpha]$ الدالة f سالبة ومنه: $A(\alpha)=-\int_0^\alpha f(x)dx$ ، ومنه:

$A(\alpha)=-\left[e^x-\frac{e}{2}x^2-x\right]_0^\alpha$ ، بالحساب نجد: $A(\alpha)=\left(1-e^\alpha+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha\right)(ua)$.

بـ لدينا: $f(\alpha)=0$ أي $e^\alpha-e\alpha-1=0$ ومنه: $e^\alpha=e\alpha+1$ ، بالتعويض في $A(\alpha)$

نجد: $A(\alpha)=\left(1-e\alpha-1+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha\right)(ua)$ و ، أي: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$