التصحيح المفصل للموضوع الأول:

التمرين الأول :

1) حل المعادلة (E) : $505x-673y=1........(E)$ لدينا $505(4)-673(3)=1$ و منه $\begin{cases}505x-673y=1\\505(4)-673(3)=1\end{cases}$ بالطرح نجد $505(x-4)=673(y-3.)$ بما أن العددان 505 و 673 أوليان فيما بينهما لحسب مبرهنة غوس 505 قاسم للعدد $(y-3.)$ و العدد 673 قاسم للعدد $(x-4)$.

أي أن $k\in Z$ $\begin{cases}x-4=673k\\ ét\\ y-3=505k\end{cases}$ يعني أن $k\in Z$ $\begin{cases}x=4+673k\\ ét\\ y=3+505k\end{cases}$ مجموعة الحلول هي $S=\{(4+673k;3+505k):\ k\in Z\}$

2) لدينا $k\in Z$ $\begin{cases}x=4+673k\\ ét\\ y=3+505k\end{cases}$

طريقة 1 :إذا كان $x\geq 0$ يعني أن $4+673k\geq 0$ يعني أن $k\geq -\frac{4}{673}$ أي $k\geq 0$

ولدينا $y=3+505k$ فهو عدد موجب .

إذا كان $x\leq 0$ يعني أن $4+673k\leq 0$ يعني أن $k\leq -\frac{4}{673}$ أي $k\leq -1$

ولدينا $y=3+505k$ فهو عدد سالب .

طريقة 2 : $xy=(4+673k)(3+505k)$ و منه $xy=339865k^2+4039k+12$

ندرس إشارة الجداء من أجل كل عدد صحيح k له جذرين هما $k_0=-\frac{4}{673}$ و $k_1=-\frac{3}{505}$ و هما عددان لا يحصران عدد صحيح و منه من أجل كل عدد صحيح k الجداء xy موجب يعني إن للعددين y و x نفس الإشارة

3) $\begin{cases}u_0=3\\ ét\\ u_{n+1}=u_n+505\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=4\\ ét\\ v_{n+1}=v_n+673\end{cases}$ المتتاليتان (u_n) و (v_n) حسابيتان و أساسها على الترتيب 505 و 673 و منه

$u_\alpha=u_0+r\alpha$ أي ان $u_\alpha=3+505\alpha$ و $v_\beta=v_0+r\beta$ أي أن $v_\beta=4+673\beta$

4) أ-تعيين الحدود المشتركة بين المتتاليتان (u_n) و (v_n) : $u_\alpha=v_\beta$ يعني أن $3+505\alpha=4+673\beta$ يعني أن $505\alpha-673\beta=1$ من ما سبق حل المعادلة (E) نستنتج أن $n\in N$ $\begin{cases}\alpha=4+673n\\ ét\\ \beta=3+505n\end{cases}$ و الحدود المشتركة هي

$u_{4+673n}=3+505(4+673n)=2023+339865n$ (أو $v_{3+505n}=4+673(3+505n)=2023+339865n$)

أي $w_n=2023+339865n$ و (w_n) متتالية حسابية أساسها 339865 و حدها الأول $w_0=2023$.

ب-لدينا $X_n=\frac{1}{505}(w_n-2023)$ حساب $P=X_1.X_2.....X_n$ لدينا

$X_n=\frac{1}{505}(w_n-2023)=\frac{1}{505}\times 339865n=673n$ و منه

$P=673.(673\times 2).....(673n)=\left(\underbrace{673\times 673.....\times 673}_{n\ \text{مرة}}\right)(1\times 2\times ....\times n)=673^n.\ n!$.

التمرين الثاني

لدينا $A(1;0;-1)$; $B(1;-2;0)$; $C(1;2;3)$.

1) إثبات أن المثلث ABC قائم في A : نحسب $\overrightarrow{AB}(0;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;4)$ و منه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0-4+4=0$ و منه محققة .

2) كتابة معادلة المستوي (Q): هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y;z+1)$ حيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=0$ أي أن $2(y)+4(z+1)=0$ يكافئ $2y+4z+4=0$ يكافئ $(Q):y+2z+2=0$

3) لدينا $(P_m):(m-1)x+2y-z-m=0$

أ. إثبات أن (P_m) يحوي مستقيم ثابت $(m-1)x+2y-z-m=0$ يكافئ $m(x-1)-x+2y-z=0$ مستقلة عن m

يعني أن $\begin{cases}x-1=0\\ ét\\ -x+2y-z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=1\\ ét\\ 2y-z=1\end{cases}$ وهو تقاطع مستويين أي انه مستقيم

تمثيله الوسيطي هو $t\in R$: $(\Delta):\begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=2t-1\end{cases}$.

$A\in(\Delta)$ يعني أن $\begin{cases}1=1\\ t=0\\ 2t-1=-1\end{cases}$ أي أن $t=0$ و منه النقطة تنتمي الى المستقيم .

$C\in(\Delta)$ يعني أن $\begin{cases}1=1\\ t=2\\ 2t-1=3\end{cases}$ أي أن $t=2$ و منه النقطة تنتمي الى المستقيم .

ب. اثبات تعامد المستويين $(Q):y+2z+2=0$ و $(P_m):(m-1)x+2y-z-m=0$: (Q) شعاعه الناظمي $\vec{n}(0;1;2)$ و (P_m) شعاعه الناظمي $\overrightarrow{n_m}(m-1;2;-1)$

نحسب الجداء السلمي نجد $(m-1)(0)+2\times1-1(2)=0$ يكافئ $0=0$ و منه متعامدان .

4) المسافة بين B و (P_m)

أ. هي $\dfrac{|-5|}{\sqrt{m^2-2m+6}}=\dfrac{|(m-1)(1)+2(-2)-0-m|}{\sqrt{(m-1)^2+2^2+1^2}}=d(m)$ و منه $d(m)=\dfrac{5}{\sqrt{m^2-2m+6}}$

أعظمية $d(m)$ نحسب المشتقة $d'(m)=\dfrac{-5\dfrac{(2m-2)}{2\sqrt{m^2-2m+6}}}{(m^2-2m+6)}=\dfrac{-5(m-1)}{\left(\sqrt{m^2-2m+6}\right)^3}$

إشارتها من إشارة $-(m-1)$ تنعدم عند 1 و تكون سالبة على المجال $[1;+\infty[$ و موجبة على المجال $]-\infty;1]$

و منه $d(m)$ تقبل قيمة حدية كبرى هي $d(1)$ و حسابها : $d(1)=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

ب. $d(m)$ أعظمية يعني أن $m=1$ لدينا $(P_1):2y-z-1=0$ و $\overrightarrow{BA}(0;2-;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1) و $2(0)-(-1)-1=0$ يعني أن $A(1;0;-1)$ نقطة من المستوي (P_1) و منه فهي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1)

التمرين الثالث

لدينا $z_A=1+i\sqrt{2}$; $z_B=i$; $z_C=\overline{z_A}$; $z_D=\overline{z_B}$; $z_E=1$.

1. حل المعادلة في $\mathbb{C}$: $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$ يكافئ $(z^2+1)=0$ أو $(z^2-2z+3)=0$ أي أن $z_0=-i$ or $z_1=i$
أو $(z^2-2z+3)=0$ نحل هذه بالمميز $\Delta=-8$ للمعادلة حلين هما $z_2=1+i\sqrt{2}$ و $z_3=1-i\sqrt{2}$.

2. أ.حساب $|z_A-1|=|i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ و $|z_B-1|=|i-1|=\sqrt{2}$ و $|z_C-z_E|=|1-i\sqrt{2}-1|=|-i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$
و منه النقط A ; B ; C تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{2}$
و نحسب $|z_D-z_E|$: $|z_D-z_E|=|-i-1|=\sqrt{2}$ و منه حتى D تنتمي الى تلك الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب.إثبات أن $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$: لدينا

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1+i\sqrt{2}-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(i\sqrt{2})=i(1+i)=i-1=z_B-z_E$ محققة

بما أن $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ فإن B صورة A بالدوران لان $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right|=1$ و زاويته

$\arg\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]=\frac{\pi}{4}$ و منه مركزه E .

بما أن $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ و $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right|=1$ فإن $|z_B-z_E|=|z_A-z_E|$ فإن المثلث ABE متساوي الساقين .

3. تعيين لاحقتي الشعاعان $z_{\overrightarrow{BD}}=-2i$ و $z_{\overrightarrow{AE}}=-i\sqrt{2}$ و منه $z_{\overrightarrow{BD}}=\sqrt{2}.z_{\overrightarrow{AE}}$ إذن الرباعي $ABDE$ شبه منحرف .

4. لدينا $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ لاحقتاهما z_1 , z_2 على الترتيب .

أ. $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان يكافئ أن $\frac{z_2}{z_1}$ عدد تخيلي صرف يكافئ $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=-\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ يكافئ $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=-\frac{z_2}{z_1}$ يكافئ
$z_2.\overline{z_1}=-z_1.\overline{z_2}$ يكافئ $z_2.\overline{z_1}+z_1.\overline{z_2}=0$

ب. تعين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $(z-z_A)(\overline{z}-z_D)+(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=0$ يكافئ
$(z-z_A)(\overline{z}-\overline{z_B})+(z-z_B)(\overline{z}-\overline{z_A})=0$ يكافئ $(z-z_A)(\overline{z-z_B})+(z-z_B)(\overline{z-z_A})=0$ يكافئ أن الشعاعان
$\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ متعامدان مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة ذات القطر $[AB]$.

التمرين الرابع

$\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x : & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$.

1) البرهان :

لما $x>1$ فإن $1-x<0$.......(1) و $\ln x>0$ و منه $-2x\ln x<0$......(2) بجمع (1)+(2) نجد
$1-x-2x\ln x<0$.

لما $0<x<1$ فإن $1-x>0$.......(3) و $\ln x<0$ و منه $-2x\ln x>0$......(4) بجمع (3)+(4) نجد
$1-x-2x\ln x>0$.

2) أ.إثبات الاشتقاقية عند 0 للدالة f : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} [1 - x\ln x] = 1 = f'(0)$

لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} [-x\ln x] = 0$ باستخدام التزايد المقارن و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 .

معادلة نصف المماس للمنحنى (C_f) على يمين 0 هي (Δ) : $y = x$.

ب.دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) لدينا $f(x) - y = -x^2\ln x$ إشارته من إشارة $-\ln x$

و منه الفرق سالب على المجال $]1; +\infty[$ أي أن (C_f) يقع تحت (Δ) على هذا المجال . .

الفرق موجب على المجال $]0; 1[$ أي أن (C_f) يقع فوق (Δ) على هذا المجال .

3) أ.حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x - x^2.\ln x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x[1 - x.\ln x] = -\infty$.

ب.دراسة اتجاه تغير $f'(x) = 1 - 2x\ln x - \dfrac{x^2}{x} = 1 - 2x\ln x - x$ أي $f'(x) = 1 - x - 2x\ln x$

من (1) لدينا لما $x > 1$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة على المجال $[1; +\infty[$.

لما $0 < x < 1$ فإن $f'(x) > 0$. ومنه f متزايدة على المجال $]0; 1]$.

جدول تغيرات

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) أ.كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) و الموازي للمستقيم (Δ)

و لتكن معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ له نفس معامل توجيه المستقيم (Δ) أي نحل المعادلة $f'(x) = 1$ أي

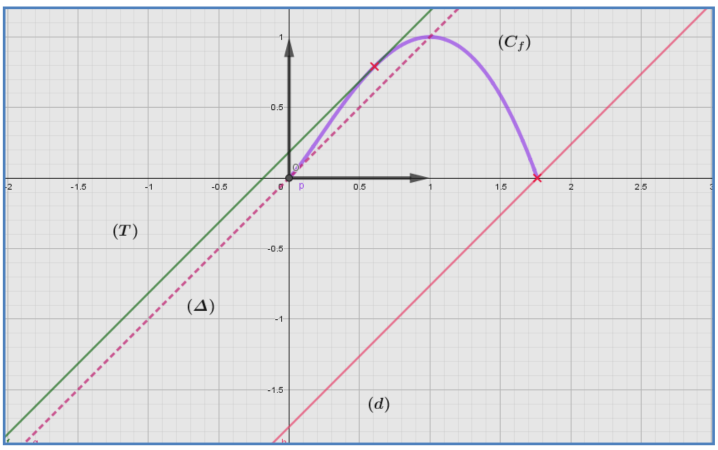
$1 - x - 2x\ln x = 1$ أي أن $-x - 2x\ln x = 0$ يعني أن $-x(1 + 2\ln x) = 0$ يكافئ $x = 0$ او $(1 + 2\ln x) = 0$

$(1 + 2\ln x) = 0$ يعني أن $\ln x = -\dfrac{1}{2}$ و منه $x = e^{-\frac{1}{2}}$ أي $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + \dfrac{1}{2e}$ و منه المعادلة هي $y = \left(x - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{e}} + \dfrac{1}{2e}$ أي $(T):\ y = x + \dfrac{1}{2e}$.

ب. بما أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty ; 1]$ و هو مجال تتغير فيه الإشارة فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1; +\infty[$.

لدينا $f(1{,}76) = 0{,}01$ و $f(1{,}77) = -0{,}02$ و الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1{,}76; 1{,}77[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}76 < \alpha < 1{,}77$.



ج.كتابة معادلة المستقيم (d) الذي يشمل النقطة $(\alpha; 0)$

و يوازي (Δ) إذن معادلته من الشكل $y = x + b$ يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha; 0)$ يعني $0 = \alpha + b$ و منه $b = -\alpha$

إذن معادلته هي $(d):\ y = x - \alpha$

رسم المنحنى (C_f) و المستقيمات (Δ) و (d) و (T)

5) لدينا m عدد حقيقي المناقشة بيانيا للمعادلة

$x^2\ln x + m = 0$ يكافئ $m = -x^2\ln x$ و منه

$x+m=x-x^2\ln x$

أي أن $x+m=f(x)$ حلولها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم $(\Delta_m): y=x+m$

المناقشة :

لما $m\in]-\infty;-\alpha[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) غير متقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $m=-\alpha$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحد و منه للمعادلة حل وحيد .

لما $m\in]-\alpha;0[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحد و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left[0;\frac{1}{2e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين و منه للمعادلة حلين .

لما $m=\frac{1}{2e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحد و منه للمعادلة حل وحيد .

لما $m\in\left]\frac{1}{2e};+\infty\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) غير متقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

6) λ عدد حقيقي محصور تماما بين العددين 0 و 1 : $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}-x^2\ln x dx$

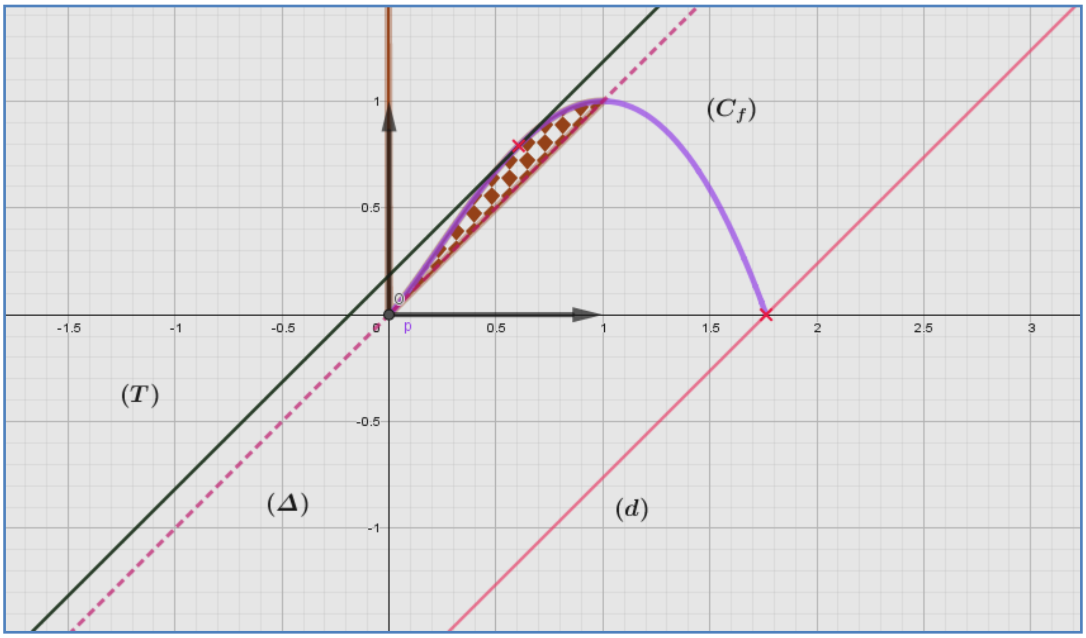
أ. حساب $A(\lambda)=\left[-\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_{\lambda}^{1}+\frac{1}{3}\int_{\lambda}^{1}x^3.\frac{1}{x}dx$ أي

$A(\lambda)=\left[-\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_{\lambda}^{1}+\frac{1}{3}\int_{\lambda}^{1}x^2dx=\left[-\frac{1}{3}x^2\ln x+\frac{1}{9}x^3\right]_{\lambda}^{1}$ و منه $A(\lambda)=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\lambda^2.\ln\lambda-\frac{1}{9}\lambda^3$

ب. حساب $\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)=\frac{1}{9}$ لان $\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}\frac{1}{0}\lambda^2.\ln\lambda=0$ بالتزايد المقارن

التفسير الهندسي : مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=x$; $x=0$; $x=1$ هي

$\frac{1}{9}\times 3^2=1\,cm^2$.

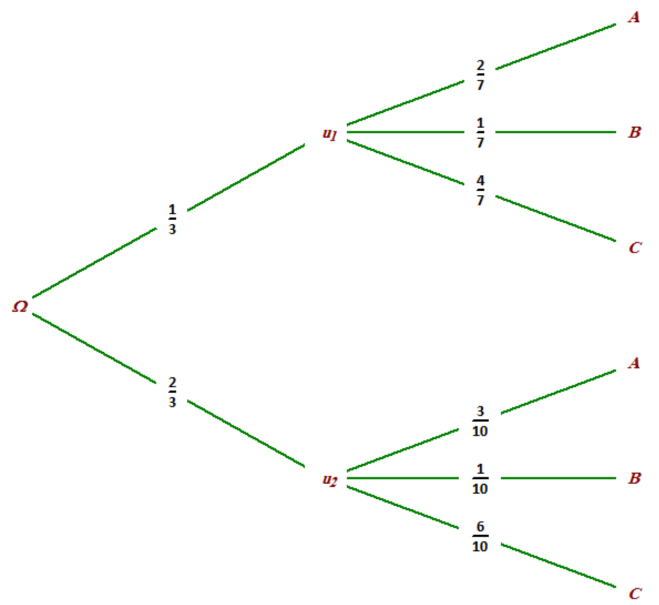


التصحيح المفصل للموضوع الثاني :

التمرين الأول :

1. لدينا $P_{U_2}(B)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$ و $P_{U_2}(A)=\frac{3}{10}$ و منه $P_{U_2}(C)=\frac{6}{10}$

الشجرة للاحتمالات هي :



2. حساب الاحتمالات :

$P(A)=P(A\cap U_1)+P(A\cap U_2)$ * و منه $P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}$ إذن $P(A)=\frac{2}{21}+\frac{1}{5}=\frac{31}{105}$

$P(B)=P(B\cap U_1)+P(B\cap U_2)$ و منه $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}$ إذن $P(B)=\frac{1}{21}+\frac{1}{15}=\frac{12}{105}$

$P(C)=P(C\cap U_1)+P(C\cap U_2)$ و منه $P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{10}$ إذن $P(C)=\frac{4}{21}+\frac{2}{5}=\frac{62}{105}$

3. أ- قيم X هي 0 و 1 و 2

ب- $P(X=0)=\frac{62}{105}$ و $P(X=1)=\frac{12}{105}$ و $P(X=2)=\frac{31}{105}$

قانون الاحتمال

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{62}{105}$	$\frac{12}{105}$	$\frac{31}{105}$

4. حساب الأمل الرياضياتي $E(X)=\frac{0+12+62}{105}=\frac{74}{105}=0,704$.

التمرين الثاني :

و (u_n) متتالية عددية حيث $u_1=0$ و $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$.

1) أ-التحقق : لدينا $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$ يعني أن $u_{n+1}=\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2$ و منه $u_{n+1}-\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2=0$ يكافئ $\left[\sqrt{u_{n+1}}-\left(\sqrt{u_n}+1\right)\right]\left[\sqrt{u_{n+1}}+\left(\sqrt{u_n}+1\right)\right]=0$ يكافئ أن $\left[\sqrt{u_{n+1}}-\left(\sqrt{u_n}+1\right)\right]=0$ و يكافئ $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$

بطريقة أخرى $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$ يعني $\sqrt{u_{n+1}}=\sqrt{u_n}+1$ أو بالتربيع نجد $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$.

ب-لدينا $\begin{cases}\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1\\ \sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}=1\\ \ldots\\ \ldots\\ \sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}=1\end{cases}$ بالجمع نجد $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_1}=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ \text{مرة}}$ أي أن $\sqrt{u_{n+1}}=n$ و منه $u_{n+1}=n^2$

و منه $u_n=(n-1)^2$ هي العبارة المطلوبة

2) التحقق : $u_n=(n-1)^2$ يكافئ $u_n=n^2-2n+1$ أي أن $u_n=n(n-2)+1$.

3) تعيين قيم n حتى يكون $n-2$ قاسما $n-5$ أي أن $n-5\equiv 0[n-2]$ أي أن $-3\equiv 0[n-2]$ قاسم للعدد -3 : $\begin{cases}n-2=-3\\ n-2=-1\\ n-2=1\\ n-2=3\end{cases}$ أي ان $\begin{cases}n=-1\ \text{مرفوض}\\ n=1\\ n=3\\ n=5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}n=1\\ n=3\\ n=5\end{cases}$ القيم هي 1 و 3 و 5 .

4) أ-إثبات $p\gcd(n-2;u_n)=1$: بما أن $u_n=n(n-2)+1$ يعني $u_n-n(n-2)=1$ حسب مبرهنة بيزو فإن $p\gcd(n-2;u_n)=1$.

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n : حتى يكون $(n-2)(n^2+1)$ قاسم للعدد $(n-5)u_n$

بما أن $p\gcd(n-2;u_n)=1$ فإن $(n-2)(n^2+1)$ قاسم للعدد $(n-5)u_n$ يعني أن $n-2$ قاسما $n-5$ و من ما سبق وجدنا قيم للعدد n و هي 1 أو 3 أو 5

لما $n=1$ نجد $(n-2)(n^2+1)=-2$ و $(n-5)u_n=0$ محققة -2 قاسم 0 .

لما $n=3$ نجد $(n-2)(n^2+1)=10$ و $(n-5)u_n=-8$ غير محققة .

لما $n=5$ نجد $(n-2)(n^2+1)=78$ و $(n-5)u_n=0$ محققة 78 قاسم 0 .

القيم المطلوبة للعدد n هي 1 و 5 .

التمرين الثالث

1. لدينا $P(z)=z^4-6z^3+29z^2-24z+100$

أ - لدينا $P(\bar{z})=\bar{z}^4-6\bar{z}^3+29\bar{z}^2-24\bar{z}+100$ أي أن $P(\bar{z})=\overline{z^4-6z^3+29z^2-24z+100}$ و منه $P(\bar{z})=\overline{P(z)}$.

و منه $P(z)=0$ يكافئ أن $\overline{P(z)}=0$ يكافئ $P(\bar{z})=0$ يعني أنه لو كان z للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\bar{z}$ حل لهذه المعادلة .

ب -للمعادلة $P(z)=0$ حل تخيلي و لبكن $z_0=\beta i$ حيث β عدد حقيقي

$(\beta i)^4-6(\beta i)^3+29(\beta i)^2-24(\beta i)+100=0$ يكافئ $\beta^4+6\beta^3 i-29\beta^2-24\beta i+100=0$ أي أن

$\beta^4-29\beta^2+100+(6\beta^3-24\beta)i=0$ يكافئ $\beta^4-29\beta^2+100=0$ و $(6\beta^3-24\beta)=0$

و $(6\beta^3-24\beta)=0$ يكافئ $6\beta(\beta^2-4)=0$ يكافئ $\beta=0$ او $\beta=-2$ او $\beta=2$ بالتعويض في المعادلة

$\beta^4-29\beta^2+100=0$ نجد أن $2^4-29\times 2^2+100=0$ و $(-2)^4-29\times(-2)^2+100=0$ محققة و منه $\beta=2$ أو $\beta=-2$

$z_0=2i$ و $z_1=-2i$ هما الحلين التخيليان الصرفيان .

نحلل $P(z)$ الى جداء

$P(z)=(z-2i)(z+2i)(z^2+az+b)$ أي أن $P(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$ بالنشر نجد

$P(z)=z^4+az^3+(4+b)z^2+4az+4b$ بالمطابقة نجد $\begin{cases}a=-6\\4+b=29\\4a=-24\\4b=100\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a=-6\\b=25\end{cases}$ و منه

$P(z)=(z^2+4)(z^2-6z+25)$

$P(z)=0$ يكافئ $(z^2+4)(z^2-6z+25)=0$ يكافئ $z=2i$ و $z=-2i$ او $(z^2-6z+25)=0$ تحل بالمميز

$\Delta=-64$ و منه للمعادلة حلين هما $z=3+8i$ او $z=3-8i$ مجموعة الحلول هي

$S=\{-2i;2i;3-8i;3+8i\}$

.2 نعتبر $z_A=2i$; $z_B=3-4i$ و $z'=\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}$ حيث $M(z)$; $M'(z')$ و I مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;1)\}$.

أ. تعيين اللاحقتين $z_1=\dfrac{2z_A+z_B}{3}=\dfrac{4i+3-4i}{3}=\dfrac{3}{3}=1$ و $z_2=\dfrac{-2z_A+z_B}{-1}=\dfrac{-4i+3-4i}{-1}=-3+8i$.

ب. مجموعة النقط (E) حيث $(E)=\{M(z):\ |z'|=2\}$

النقطة M تنتمي الى (E) يعني أن $\left|\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}\right|=2$ يكافئ أن $|-iz+4+3i|=2|z-2i|$ يكافئ

$|z+4i-3|=2\,|z-2i|$ (بالضرب في $|i|$ في الطرف الأيسر)

$|z+4i-3|=2\,|z-2i|$ يكافئ $MB=2\,MA$ يكافئ $MB^2=4MA^2$ يكافئ $MB^2-4MA^2=0$ يكافئ

$(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA})=0$ يكافئ $\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MI}=0$

مجموعة النقط (E) هي الدائرة ذات القطر $[IJ]$ و إنشاءها في أخر التمرين

ج.لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z')=2\pi k$ و k عدد صحيح أي أن z' عدد حقيقي موجب)

التحقق : أن $D\in(\Gamma)$ حيث $z_D=\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}i$. بالتعويض في $z'=\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}$ نجد $z'=\dfrac{-i\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)+4+3i}{\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}i-2i}$

و منه $z'=\dfrac{-\dfrac{9}{2}i-\dfrac{5}{2}+4+3i}{\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}i}$ أي أن $z'=\dfrac{-\dfrac{3}{2}i+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}i}=\dfrac{-3i+3}{9-9i}$ أي أن $z'=\dfrac{1}{3}$ أي أن $\arg(z')=2\pi k$ و منه

$D\in(\Gamma)$.

$\arg(z')=2\pi k$ يعني أن $\arg\left(\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}\right)=2\pi k$ يكافئ $\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)(-i)\right]=2\pi k$ يكافئ

$\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)\right]+\arg(-i)=2\pi k$ يكافئ $\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)\right]-\dfrac{\pi}{2}=2\pi k$ يكافئ

$\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)\right]=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ يكافئ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k:\ k\in Z$ مجموعة النقط (Γ) هي قوس من الدائرة التي قطرها $[AB]$ و الشامل للنقطة D

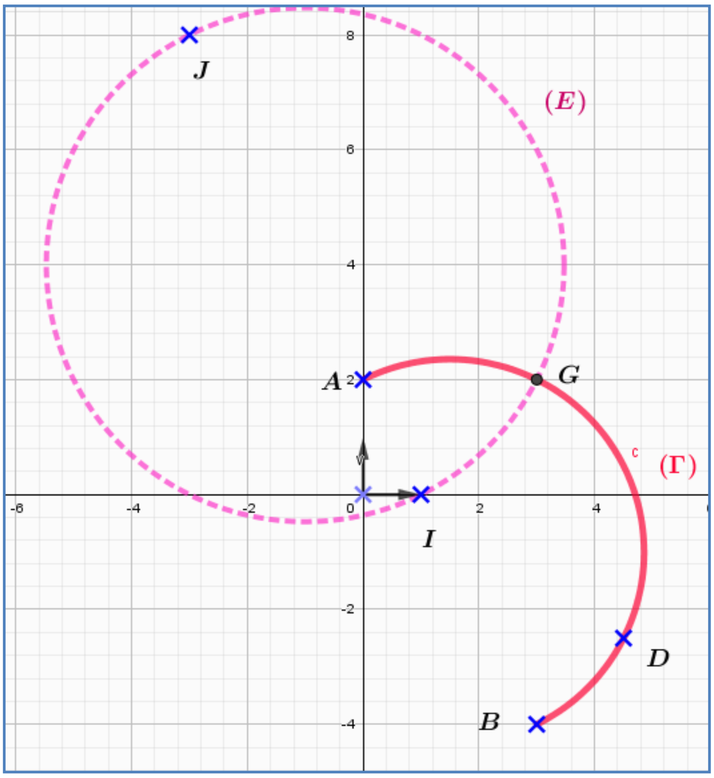
المجموعة (Γ) إنشاءها في أخر التمرين

3. تعيين الشكل الجبري لتقاطع (Γ) و (E)

$\arg(z')=2\pi k$ و $|z'|=2$ يعني أن $z'=2$ أي أن $\frac{-iz+4+3i}{z-2i}=2$ يكافئ $-iz+4+3i=2z-4i$ أي أن

$(-i-2)z=-4-7i$ و منه $z=\frac{4+7i}{2+i}=\frac{(4+7i)(2-i)}{5}$

أي $z=3+2i$ إذن $z_G=3+2i$



التمرين الرابع :

I - لدين $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$.

1. إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تشمل نقطة ثابتة يعني إحداثياتها لا تتعلق بالثابت k يعني أن $-kx=0$ من أجل كل ثابت حقيقي k يعني أن $x=0$ و منه $f_k(0)=(0+1)^2e^{-k.0}=1$ و منه المنحنيات (C_k) كلها تشمل $A(0;1)$.

2. حساب النهايات :

لما k معدوم : $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و

$\lim_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

لما k حقيقي موجب تماما : $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-kx}=0$ بالتزايد المقارن .

$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-kx}=+\infty$

لما k حقيقي سالب تماما: $\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-kx}=0$ بالتزايد المقارن .

$\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-kx}=+\infty$.

3. أ. حساب المشتقة $f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2e^{-kx}$ أي أن $f_k'(x)=(x+1)(-kx-k+2)e^{-kx}$

المناقشة :

لما k معدوم : $f_0'(x)=2(x+1)$ موجبة على المجال $[-1;+\infty[$ و منه الدالة f_0 متزايدة على هذا المجال و سالبة على $]-\infty;-1]$ و منه الدالة f_0 متناقصة على هذا المجال

لما k حقيقي موجب تماما: فإن $f_k'(x)=0$ يكافئ $x=-1$ او $x=\frac{-k+2}{k}$ (و $\frac{-k+2}{k}\geq-1$)

و $f_k'(x)\geq0$ يكافئ x ينتمي للمجال $\left[-1;\frac{-k+2}{k}\right]$ و منه f_k متزايدة على هذا المجال

و $f_k'(x)\leq0$ يكافئ x ينتمي الى إحدى المجالين $]-\infty;-1]$ او $\left[\frac{-k+2}{k};+\infty\right[$ و منه f_k متناقصة على هذين المجالين .

لما k حقيقي سالب : فإن $f_k'(x)=0$ يكافئ $x=-1$ او $x=\frac{-k+2}{k}$ (و $\frac{-k+2}{k}\leq-1$)

و $f_k'(x)\geq0$ يكافئ x ينتمي الى إحدى المجالين $\left]-\infty;\frac{-k+2}{k}\right]$ او $[-1;+\infty[$ و منه f_k متزايدة على هذين المجالين .

و $f_k'(x)\leq0$ يكافئ x ينتمي للمجال $\left[\frac{-k+2}{k};-1\right]$ و منه f_k متزايدة على هذا المجال

ب-لما k حقيقي موجب تماما : جدول تغيراتها

x	$-\infty$		-1		$\frac{-k+2}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_k(-1)$	$\nearrow$	$f_k\left(\frac{-k+2}{k}\right)$	$\searrow$	0

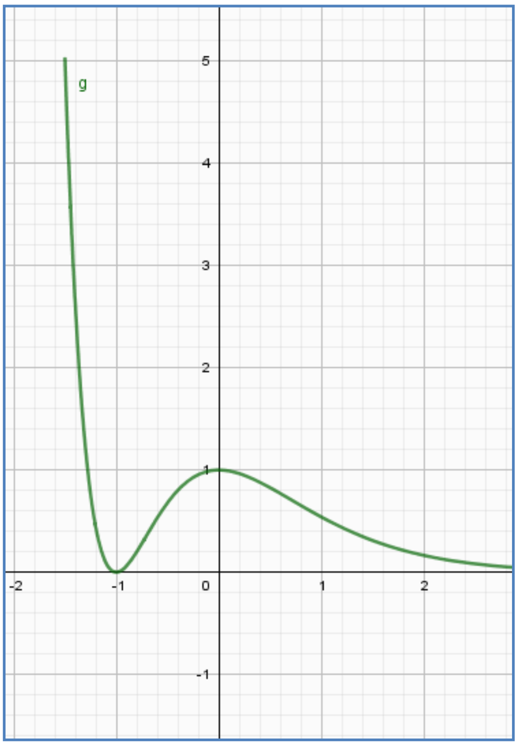
4. دراسة الوضع النسبي بين (C_k) و (C_{k+1}) نحسب الفرق $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\left[\frac{1}{e}-1\right]$ و هذا الفرق سالب و منه (C_{k+1}) يقع تحت (C_k) من أجل كل وسيط حقيقي ثابت k .

II - لتكن $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

1. جدول تغيرات على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{e^3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

و الرسم المنحنى (C_f)



2. أ-لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x)=1$ تكافئ $f(x)-1=0$ نضع $h(x)=f(x)-1$ و نحسب $h(-1,28)=0,01$ $h(-1,27)=-0,08$; و h مستمرة و متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا α حيث $-1,28<\alpha<-1,27$ و $h(0)=f(0)-1=0$ الحل الأخر معدوم .

ب-تعيين m حتى يكون للمعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حل وحيد

$\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ يعني أن $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|^2=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|^2$ يكافئ $f(x)=f(m)$

من البيان نلاحظ أن المنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta_m): y=f(m)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة لما m تنتمي للمجال $]-\infty;\alpha[$.

3. لدينا $g(x)=(x+1)e^{-2x}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

أ - إثبات أن $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ نحسب $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}=0$ محققة .

و منه $g(x)=-\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}$ أي أن الدالة الأصلية لدالة g هي G حيث $G(x)=-\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$ و c ثابت حقيقي أي $G(x)=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$

ب-حساب التكامل $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}+\int_{-1}^{0}g(x)dx$ و منه

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$$

و منه $\int_{-1}^{0}f(x)dx=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^2=\frac{-5+e^2}{4}$ إذن المساحة هي $\frac{-5+e^2}{4}u.a$