التمرين رقم 1　الحل

1. باقي القسمة الاقليدية ل $2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ و 2^4 على العدد 5

لدينا $2^0 = 1 = 5\times 0 + 1$ ومنه $2^0 \equiv 1[5]$ الباقي هو **1**

لدينا $2^1 = 2 = 5\times 0 + 2$ ومنه $2^1 \equiv 2[5]$ الباقي هو **2**

لدينا $2^2 = 4 = 5\times 0 + 4$ ومنه $2^2 \equiv 4[5]$ الباقي هو **4**

لدينا $2^3 = 8 = 5\times 1 + 3$ ومنه $2^3 \equiv 3[5]$ الباقي هو **3**

لدينا $2^4 = 16 = 5\times 3 + 1$ ومنه $2^4 \equiv 1[5]$ الباقي هو **1**

2. أ) اثبات ان من اجل كل عدد طبيعي n يكون $2^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا $2^4 \equiv 1[5]$ باستعمال خاصية الرفع الى القوة n

يكون $\left(2^4\right)^n \equiv 1^n[5]$ ومنه $2^{4n} \equiv 1[5]$ لان $1^n = 1$ و $\left(2^4\right)^n = 2^{4n}$

ب) باقي قسمة العدد 2^{2016} على 5

لدينا $2016 = 4\times 504$ اي من الشكل $2016 = 4\times n$

ومنه $2^{2016} \equiv 2^{4n}[5]$ بما ان $2^{4n} \equiv 1[5]$ فان $2^{2016} \equiv 1[5]$

اذن باقي قسمة 2^{2016} على 5 هو **1**

3. تعيين قيم n بحيث يكون $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$

ومنه $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$ يكافئ $1 + 2 + n \equiv 0[5]$ يكافئ

$n \equiv 2[5]$ ومنه $n = 5k + 2 \,/\, k \in \mathbb{N}$

التمرين رقم 2　الحل

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_n = 3n - 2$

1) حساب كلا من. u_0, u_1, u_2 و u_3

من أجل $n = 0$ نجد $u_0 = 3\times 0 - 2$ ومنه $u_0 = -2$

من أجل $n = 1$ نجد $u_1 = 3\times 1 - 2$ ومنه $u_1 = 1$

من أجل $n = 2$ نجد $u_2 = 3\times 2 - 2$ ومنه $u_2 = 4$

من أجل $n = 3$ نجد $u_3 = 3\times 3 - 2$ ومنه $u_3 = 7$

2) اثبات ان (u_n) حسابية

(u_n) حسابية يعني ان $u_{n+1} - u_n = r$ حيث $r \in \mathbb{R}$

لدينا $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n - 2)$

ومنه $u_{n+1} - u_n = 3n + 3 - 2 - 3n + 2$

ومنه $u_{n+1} - u_n = 3$ ومنه (u_n) متتالية حسابية اساسها $r = 3$

3) اتجاه تغير المتتالية (u_n)

بما ان $r = 3$ ومنه $r > 0$ وبالتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

4) بيان أن 1954 حد من حدود المتتالية

العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n)

يعني ان $3n - 2 = 1954$ ومنه $n = \frac{1956}{3} = 652$

بما ان $n = 652$ وهو عدد طبيعي فان 1954 حد من حدود المتتالية

(u_n) رتبته $\boxed{653}$.

5) أ) حساب المجموع S_n بحيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

المتتالية حسابية عدد الحدود هو $n+1$ ومنه

$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$ ومنه $S_n = (n+1)\frac{-2 + 3n - 2}{2}$

ومنه $\boxed{S_n = \frac{1}{2}(n+1)(-4+3n)}$

ب) تعيين قيمة n حيث $S_n = 328$

لدينا $S_n = 328$ يكافئ $\frac{1}{2}(n+1)(-4+3n) = 328$

ومنه $(n+1)(-4+3n) = 656$ بالنشر والتبسيط ينتج

$3n^2 - n - 660 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية لحلها نحسب المميز

ونجد $\Delta = 7921$ ومنه $\Delta = (89)^2$

نجد $n = \frac{1+89}{6}$ أي $n = 15$ مقبول

نجد $n = \frac{1-89}{6}$ أي $n = -14.6$ مرفوض

ومنه $n = 15$ حيث $S_n = 328$

التمرين رقم 3 الحل

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ : $f(x)=\frac{4-x}{x+1}$.

1. أ) نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ و عند (3) ،

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x}{x+1}=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4-x}{x+1}=-1$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y=-1$

لدينا $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}\frac{4-x}{x+1}=\lim\limits_{\substack{> \\ y\to0}}\frac{5}{y}$ ومنه $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}}\frac{4-x}{x+1}=\lim\limits_{\substack{< \\ y\to0}}\frac{5}{y}$ ومنه $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x)=-\infty$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب معادلته $x=-1$

2. دراسة تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها .

الدالة f تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة $f'(x)=\frac{-5}{(x+1)^2}$

بما أن $f'(x)\le 0$ فان الدالة f متناقصة على $\mathbb{R}-\{-1\}$

ومنه جدول التغيرات مقابل

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

3. بيان أنه توجد نقطتان من المنحنى (C_f) يكون معامل توجيه المماس عندهما يساوي **5−** .

لدينا معامل التوجيه هو **5−** أي $f'(x)=-5$

ومنه $\frac{-5}{(x+1)^2}=-5$ نجد $(x+1)^2=1$

ومنه $(x+1)=1$ أي $x=0$ ومنه $(x+1)=-1$ أي $x=-2$

معادلة المماس (T_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها **0** .

هي $(T_1): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ لدينا

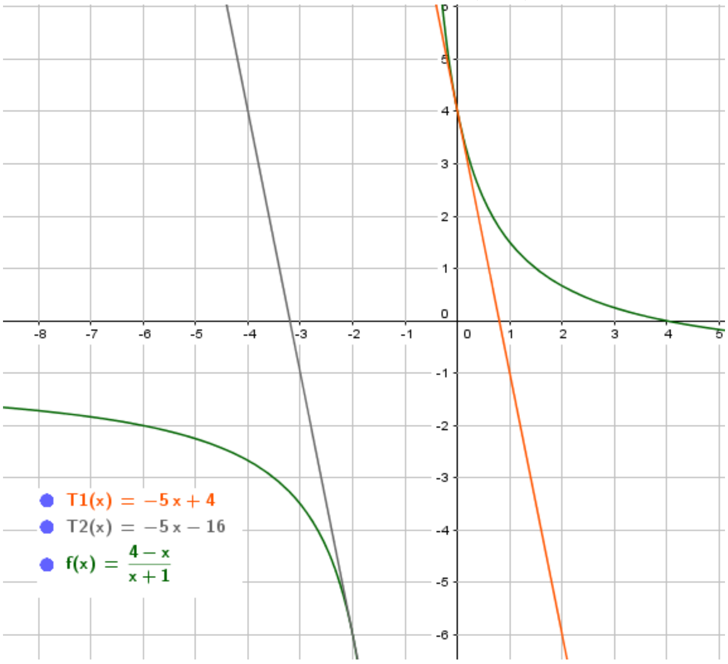
$f(0)=4$ و $f'(0)=-5$ ومنه $(T_1): y=-5x+4$

معادلة المماس (T_2) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها **2−** .

هي $(T_2): y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ لدينا

$f(-2)=-6$ و $f'(-2)=-5$ ومنه $(T_2): y=-x-16$

4. رسم المنحنى (C_f) والمماسين (T_1) و (T_2)



التمرين رقم 1 الحل

1. أ) باقي القسمة الاقليدية ل 4^3 على العدد 9

لدينا $4^3=64=7\times9+1$ ومنه $4^3\equiv1[9]$ الباقي هو **1**

ب) استنتاج ان من اجل كل عدد طبيعي k يكون $4^{3k}\equiv1[9]$

لدينا $4^3\equiv1[9]$ باستعمال خاصية الرفع الى القوة k

يكون $(4^3)^k\equiv1^k[9]$ ومنه $4^{3k}\equiv1[9]$ لان $1^k=1$ و $(4^3)^k\equiv4^{3k}$

ج) دراسة بوقي قسمة 4^n على العدد 9

لدينا $4^0=1=9\times0+1$ ومنه $4^0\equiv1[9]$ الباقي هو **1**

لدينا $4^1=4=9\times0+4$ ومنه $4^1\equiv4[9]$ الباقي هو **4**

لدينا $4^2=16=9\times1+7$ ومنه $4^2\equiv7[9]$ الباقي هو **7**

لدينا $4^3=64=9\times3+1$ ومنه $4^3\equiv1[9]$ الباقي هو **1**

نستنتج ان بواقي قسمة 4^n على العدد 9 دوري ودوره **3** ونكتب

$4^{3k}\equiv1[9]$ ومنه الجدول التالي يوضح البواقي

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
r	1	4	7

البواقي هي 1 و 4 و 7

د) باقي القسمة الاقليدية ل 2015^{2016} على **9**

لدينا $2015\equiv-1[9]$ لان $8\equiv-1[9]$

وبالتالي $2015^{2016}\equiv(-1)^{2016}[9]$

بما ان 2016 زوجي الباقي **1** اي $2015^{2016}\equiv1[9]$

2. اثبات ان $8^{2n}\equiv1[9]$

أ) لدينا $8\equiv-1[9]$ باستعمال خاصية الرفع الى القوة $2n$ نجد

$8^{2n}\equiv(-1)^{2n}[9]$ ومنه $8^{2n}\equiv1[9]$ لان $(-1)^{2n}=1$

ب) تعيين قيم n بحيث يكون $8^{2n}+4^n+1$ مضاعفا ل **9**

اي $8^{2n}+4^n+1\equiv0[9]$

ومنه $8^{2n}+4^n+1\equiv0[9]$ يكافئ $1+4^n+1\equiv0[9]$

يكافئ $4^n\equiv-2[9]$ اي $4^n\equiv7[9]$ من الجدول نجد $n=3k+2...k\in\mathbb{N}$

التمرين رقم 2 الحل

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ اساسها : $r=3$ حدها

الاول u_0 وتحقق : $u_3+u_2+u_1+u_0=10$

1) حساب u_0

نكتب كل الحدود بدلالة u_0 علما ان $u_n=u_0+nr$

ومنه $u_0+3r+u_0+2r+u_0+r+u_0=10$

ومنه $4u_0+6r=10$ ومنه $4u_0=-8$ نجد $u_0=-2$

2) عبارة الحد العام u_n بدلالة n

لدينا $u_n=u_0+nr$ ومنه $u_n=-2+3n$

3) تعيين قيمة n حيث $u_n=145$

لدينا $u_n=145$ يكافئ $-2+3n=145$ نجد $n=49$

ونكتب $u_{49}=145$

4) حساب المجموع S بحيث: $S=u_0+u_1+...+u_{49}$

المتتالية حسابية عدد الحدود هو 50 ومنه

$S=(50)\frac{u_0+u_{49}}{2}$ ومنه $S=(50)\frac{-2+145}{2}$ ومنه $S=3575$

5) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=2u_n+3$

حساب المجموع S' بحيث: $S'=v_0+v_1+...+v_{49}$

المتتالية (v_n) ليست حسابية ولا هندسية لا يوجد قانون لحساب

المجموع وعليه بما ان $v_n=2u_n+3$ فيصبح S'

$S'=2u_0+3+2u_1+3+...+2u_{49}+3$ يكافئ

$S'=3(50)+2(u_0+u_1+...+u_{49})$

وبما ان $S=u_0+u_1+...+u_{49}=3575$

فان $S'=3(50)+2(3575)$ ومنه $S'=7300$

التمرين رقم 3 الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$f(x)=x^3-6x^2+9x$

1. حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

2. أ) اثبات ان $f'(x)=(3x-3)(x-3)$ ......(1)

الدالة f معرفة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة هي $f'(x)=3x^2-12x+9$ .....(2)

ولدينا $f'(x)=(3x-3)(x-3)$ باستعمال النشر والتبسيط نجد

$f'(x)=3x^2-9x-3x+9$ ومنه $f'(x)=3x^2-12x+9$

ومنه (1) و (2) متطابقتين اذن $f'(x)=(3x-3)(x-3)$

ب) دراسة اتجاه التغير

لدينا $f'(x)=(3x-3)(x-3)$

اشارة المشتقة $f'(x)=0$ يعني $(3x-3)(x-3)=0$

ومنه $(3x-3)=0$ أي $x=1$ او $(x-3)=0$ اي $x=3$

لما $x\in[1;3]$ فان $f'(x)\le 0$ ومنه الدالة f متناقصة

لما $x\in]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$ فان $f'(x)\ge 0$ ومنه الدالة f متزايدة

جدول تغيرات الدالة

x	$+\infty$		1		3		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

لدينا $f(1)=1-6+9=4$ و $f(3)=27-54+27=0$

3. أ) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة E. فالتها 2

لدينا $(T): y=f'(2)(x-2)+f(2)$

ومنه $f'(2)=-3$ و $f(2)=2$ وبالتالي $(T): y=-3x+8$

ب) اثبات ان : $f(x)-(-3x+8)=(x-2)^3$

لدينا الطرف الاول $f(x)-(-3x+8)=x^3-6x^2+9x+3x-8$

ومنه $f(x)-(-3x+8)=x^3-6x^2+12x-8$

و لدينا الطرف الثاني $(x-2)^3=x^3-3x^2(2)+3(4)x-8$

ومنه $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$

الطرفين متطابقين ومنه $f(x)-(-3x+8)=(x-2)^3$

ج) الوضع النسبي بين المماس (T) و المنحنى (C_f)

لدينا $f(x)-y=f(x)-(-3x+8)=(x-2)^3$

اشارة الفرق من اشارة $(x-2)$

ومنه لما $x\in]-\infty;-2[$ فان $f(x)-y<0$

(T) يقع فوق المنحنى (C_f)

لما $x\in]-2;+\infty[$ فان $f(x)-y>0$

(T) يقع تحت المنحنى (C_f)

د) أثبات أن النقطة E ذات الفاصلة 2 هي نقطة انعطاف ل (C_f)

لدينا $f'(x)=3x^2-9x-3x+9$ الدالة f' معرفة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة هي $f''(x)=6x-9$

اشارة المشتقة $f''(x)=0$ يعني $6x-9=0$ ومنه $x=3/2$

جدول الاشارة الدالة

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

المشتقة الثانية تنعدم مغيرة الاشارة لدينا $f(2)=2$ المنحنى يقبل نقطة انعطاف هي $E(2;2)$

4. أ) اثبات ان $f(x)=x(x-3)^2$

ننشر $f(x)=x(x^2-6x+9)$ ومنه $f(x)=x^3-6x^2+9x$

ب) نقاط التقاطع للمنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

أي ان $f(x)=0$ ومنه $x(x-3)^2=0$

نجد $x=0$ النقطة هي $(0;0)$

$x=3$ النقطة هي $(3;0)$

5. حساب $f(4)$ ومنه $f(4)=64-96+36=4$ والرسم