الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: **2021**

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: **04** سا و**30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0 = 3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 1$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n < \frac{9}{2}$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

أ . بيِّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

جـ. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$ ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \cdots + \frac{1}{3}u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبريـر.

1) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $a = 3n+2$ ، $b = 5n+1$ و نضع: $d = PGCD(a\,;b)$

مجموعة القيم الممكنة لِ d هي: أ) $\{1;3\}$ ب) $\{1;7\}$ جـ) $\{1;5\}$

2) نضع: $A(\alpha) = \ln(e^{3\alpha}+e^{\alpha}) + \ln(e^{4\alpha}+e^{2\alpha}) + \ln(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})$ ، حيث α عدد حقيقي.

من أجل كلّ عدد حقيقي α العبارة المبسطة لِ $A(\alpha)$ هي:

أ) $6\alpha + \ln(e^{2\alpha}+1)$ ب) $6 + 3\ln(e^{2\alpha}+1)$ جـ) $6\alpha + 3\ln(e^{2\alpha}+1)$

3) حلُّ المعادلة التفاضلية $y' = -2y + 4$ الذي يحقق $y(0) = 2021$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِ:

أ) $h(x) = 2019e^{-2x} + 2$ ب) $h(x) = 2019e^{2x} + 2$ جـ) $h(x) = 2021e^{-2x} - 2$

4) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بِـ: $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، المجموع $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ يساوي:

أ) $-\ln(n+1)$ ب) $\ln(n+2)$ جـ) $1-\ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

2) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9

3) بيّن أنّ العدد $2021^{1442} + 1691^{1954} - 8$ مضاعف للعدد 9

4) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n} + 2021^{6n+1} + 1443$ مضاعف للعدد 9

5) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2021^{1442} + 1691^{1954} + 5n$

عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[9]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 5 + e^{x-1}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث: $1{,}71 < \alpha < 1{,}72$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بِـ : $f(x) = x + 1 + (-x^2 - 2x + 3)e^{1-x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)e^{1-x}$

ب. استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $]\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جـ. بيّن أنّ: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+1$ مقارب مائل لِـ (C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

3) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لِـ (Δ) في نقطة A يُطلب تعيين فاصلتها **(لا يطلب كتابة معادلة (T))**

4) أ . بين أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $(1+\sqrt{6})$

ب. ارسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ: $f(\alpha) \simeq 1{,}1$ ، $f(\sqrt{5}) \simeq 1{,}4$ و $f(1+\sqrt{6}) \simeq 3{,}1$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $h(x) = -x + 1 + (-x^2 + 2x + 3)e^{1+x}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $h(x) = f(-x)$

ب. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $13x-9y=1 \cdots (E)$ ، ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أ . تَحقّق أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $x\equiv 7[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. نضع: $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ حيث n عدد طبيعي.

بيّن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

3) بفرض أنّ $(x;y)$ حلّ للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان.

عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة جـ)
1) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة:	زوجية.	لا زوجية ولا فردية.	فردية.
2) الدّالة العددية g معرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{(x-1)e^x-x+1}{e^x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم. تكون: $y=x+a$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لِـ (C) من أجل:	$a=1$	$a=-1$	$a=0$
3) العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{3745}$ في نظام تعداد أساسه 8 ويُكتب $\overline{5\alpha 15}$ في نظام تعداد أساسه 7 من أجل:	$\alpha=6$	$\alpha=5$	$\alpha=4$
4) β عدد حقيقي، تكون الأعداد: $e^{\beta}+1$ ، $e^{\beta}+2$ ، $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية من أجل β يساوي:	$\ln(\sqrt{5}-1)$	0	$\ln(1+\sqrt{5})$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=3+e^{-2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n^2-6u_n+12$

1) أ . تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(u_n-3)^2+3$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$

2) أ . ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ب. استنتج أنّ (u_n) متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب حساب حدّها الأوّل.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$

جـ. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$

احسب P_n بدلالة n

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ: $g(x) = 2\ln x - 1 - \dfrac{1}{x^2}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ : $f(x) = -x - 2 + \dfrac{3 + 2\ln x}{x}$

(C) التمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (**وحدة الطول** $2cm$)

1) أ . احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب. بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\dfrac{1}{\alpha}]$ و متناقصة تماما على المجال $[\dfrac{1}{\alpha};+\infty[$

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ . احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x-2)]$ ثمّ استنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

ب. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) بيّن أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1 ثمّ اكتب معادلة لِـ (T) مماس (C) عند A

5) ارسم (T) ، (Δ) و (C) (نأخذ: $\dfrac{1}{\alpha} \simeq 0{,}53$ و $f(\dfrac{1}{\alpha}) \simeq 0{,}73$)

6) الدّالة h معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ: $h(x) = |x| + 2 - \dfrac{3 + \ln(x^2)}{|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. تحقق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $h(x) = -f(x)$

جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني